



大小鱼山地基土随机场统计特征及可靠性分析

姜雄¹, 郑贤舟²

(1. 中交第三航务工程勘察设计院有限公司, 上海 200032;

2. 舟山石化园区投资发展有限公司, 浙江 舟山 316021)

摘要: 针对传统可靠度设计方法在地基可靠度分析中算得的可靠度指标过小、失效概率过大的问题, 将随机场理论应用于地基可靠度分析。结合鱼山地区围垦促淤过程中获得的大量地勘资料, 基于随机场理论讨论采用改进的递推空间法确定土层相关距离的合理性, 统计出该地区典型土层土性指标的相关距离及方差折减函数值, 并将其应用于岸坡稳定的可靠度分析。结果表明: 随机场理论应用于地基土的可靠度分析具有重要的应用和推广价值, 采用改进的递推空间法更易确定土性指标的相关距离值, 地基土强度指标黏聚力、内摩擦角经方差折减后得到的岸坡可靠性指标更符合工程实际的安全程度。

关键词: 随机场; 相关距离; 方差折减函数; 可靠度分析

中图分类号: U 656.2

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2021)05-0016-06

Random field statistical characteristics and reliability analysis of foundation soil in Dayushan and Xiaoyushan

JIANG Xiong¹, ZHENG Xian-zhou²

(1. CCCC Third Harbor Consultants Co., Ltd., Shanghai 200032, China;

2. Zhoushan Petrochemical Park Investment Development Co., Ltd., Zhoushan 316021, China)

Abstract: Aiming at the problem that the reliability index calculated by the traditional reliability design method in the foundation reliability analysis is undersized and the failure probability is oversized, we apply the random field theory to the foundation reliability analysis. Combining with a large number of geological exploration data obtained in the process of building the green petrochemical base in the Yushan area, we discuss the rationality of determining the correlation distance of soil layer by improved recursive space method based on random field theory, count the correlation distance and variance reduction function value of the typical soil layer in this area, and apply it to the reliability analysis of slope stability. The results show that the application of random field theory to the analysis of foundation reliability has an important promotional value. The improved recursive space method is easier to determine the correlation distance value of soil property indexes, and the reliability index obtained by variance reduction of foundation soil strength indexes cohesive force and friction angle is more in line with the safety degree of engineering practice.

Keywords: random field; correlation distance; reduction function of variance; reliability analysis

传统工程设计往往采用安全系数法评价建筑物的安全性, 无法定量表达建筑物的安全程度。而可靠度分析以概率论为基础, 通过建立与各种随机变量相关的可靠度理论模型反映建筑物破坏的概率, 其不但可以得出建筑物的平均安全系数, 也可得出

此安全状态下的破坏概率, 为工程设计优化提供了理论依据, 具有较高的应用价值。目前可靠度理论已在结构工程稳定性安全评价中得到广泛的应用, 而将其引入岩土工程稳定性分析还在探索中, 其主要障碍在于由岩土勘察获得的土性指标“点方差”

收稿日期: 2020-12-01

作者简介: 姜雄(1989—), 男, 硕士, 工程师, 从事港口工程设计。

过大, 使计算出的地基土的可靠度指标过小, 与工程的实际安全程度不符^[1]。这是由于常用的数理统计方法往往将土作为各向同性材料, 忽略了土是自然沉积的产物, 其性质既有变异性又有相关性的特点, 而实际上岩土工程可靠性取决于土性指标的“空间平均特性”而非“点特性”^[2-4]。

1977 年, Vanmarcke 提出了土性剖面随机场理论模型的概念, 通过引入“方差折减函数 $\Gamma^2(h)$ ”将土性指标的“点”变异性与空间变异性联系在一起, 实现了由“点特性”到“空间平均特性”的过渡^[5]。随后众多学者基于随机场理论对土性指标的变异性 and 相关性进行深入研究, 但是将随机场理论应用于地基土可靠性分析中仍然任重而道远。本文根据随机场理论, 以大小鱼山地区围垦促淤过程中获得的大量地勘资料为基础, 采用改进的递推空间法得出该地区典型土层的相关距离和方差折减函数值, 并应用于岸坡可靠度分析中, 为本地区地基土的可靠度分析提供参考。

1 建立土性剖面空间随机场模型

1.1 随机场的建立

假设 Q 为空间中的一个点, 坐标为 (x, y, z) , 则随机函数 $T(Q) = T(x, y, z)$ 称为三维空间的一个随机场。若满足如下条件:

- 1) 均值 $E[T(Q)]$ 与 $Q(x, y, z)$ 无关, 且为常数, 令 $E[T(Q)] = \mu$;
- 2) 自协方差函数与点无关, 仅是两点间距 $Q_1 Q_2$ 的函数, 即 $Cov(Q_1, Q_2) = E\{[T(Q_1) - \mu][T(Q_2) - \mu]\}$ 。

则此随机场为高斯平稳齐次随机场。由于土层是经风化和自然沉积形成的, 在岩土工程性质分析中, 众多学者更加注重土性沿深度方向的变化。因此, 用一维高斯平稳齐次随机场模拟土性剖面更符合实际情况^[6]。下文直接用 Q 的竖向深度坐标 z 表示点 Q , 即用 $T(z)$ 来表示 $T(Q)$ 。

1.2 随机场的平稳性和各态历经性

应用高斯平稳齐次随机场理论的前提是土层性质要具有平稳性和各态历经性。随机场的平稳

性是指它的统计特性不随空间位置的不同而变化的性质, 假设随机场 $\{T(z), z \in Z\}$ 为二阶矩场 (对于一个样本, 均值和方差都存在即为二阶矩场), 若满足:

- (1) 对一切 $z \in Z, E[T(z)] = a$ (常数), Z 为深度坐标的集合, $T(z)$ 为样本函数;
- (2) 对任意 z 及 $z + \Delta z \in Z, \{T(z)\}$ 的相关函数 $\rho(z, z + \Delta z)$ 与 z 无关, 并以 $\rho(\Delta z)$ 表示, 即 $\rho(\Delta z) = E\{T(z) \cdot T(z + \Delta z)\}$, 则称该随机场具有平稳性。

各态历经性是指可以从任意一个随机场的样本函数中获得它的各种统计特性, 具有这一特性的随机场称为具有各态历经性的随机场。所以, 只要有一个样本函数就可以表示出具有各态历经性随机场的所有的数字特征。如果 $\{T(z)\}$ 是均方连续平稳随机场, 且其均值和相关函数均具有各态历经性, 则随机场 $\{T(z)\}$ 是各态历经的或是遍历的。而随机场的各态历经性表示各个样本函数都同样经历了该随机场的各种可能状态, 从任一个随机函数都可以得到随机场的全部信息, 任何一个样本函数的特性都可以代表整个随机场的特性。

1.3 方差折减函数

根据随机场基本理论, 若土性剖面符合一维高斯平稳齐次随机场, 土层厚度为 h , 则随机场在局部区间 $[z, z + h]$ 上的积分:

$$T_h(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} T(z) dz$$

(1)

式中: $T(z)$ 为一维齐次随机场; $T_h(z)$ 为随机场在局部区间上的平均值。

则显然有:

$$E[T_h(z)] = E\left[\frac{1}{h} \int_z^{z+h} T(z) dz\right] = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} E[T(z)] dz = 0$$

(2)

即随机场的局部平均 $T_h(z)$ 的均值和随机场 $T(z)$ 整体均值一样。 $T_h(z)$ 的方差为:

$$\begin{aligned} \text{var}[T_h(z)] &= \text{var}\left[\frac{1}{h} \int_z^{z+h} T(z) dz\right] = \\ &\sigma^2 \left[\frac{2}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{\Delta z}{h}\right) \rho(\Delta z) d(\Delta z) \right] \end{aligned}$$

(3)

式中： σ^2 为 $T(z)$ 的点方差； $\rho(\Delta z)$ 为标准相关函数； Δz 为土层中两点间距离，反映了土体“点与点”之间的相关性规律。

由式(3)可见，局部空间平均 $T_h(z)$ 的方差与 $T(z)$ 的点方差具有一定关系。令：

$$\Gamma^2(h) = \frac{\text{var}[T_h(z)]}{\sigma^2} = \left[\frac{2}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{\Delta z}{h}\right) \rho(\Delta z) d(\Delta z) \right] \quad (4)$$

式中： $\Gamma^2(h)$ 为方差折减函数，无量纲，其表示 $T_h(z)$ 的空间平均方差与 $T(z)$ 的点方差之比，反映用于平均的空间尺度增大时，衡量“空间平均特性”变异性的方差衰减的特性。如果每一点的土性都与其他点相互独立，那么就不会呈现出“空间平均特性”的方差衰减现象，也即土性的方差衰减现象是与其相关性有关的。

1.4 相关距离的引入

1977 年，Vanmarcke 引入“相关距离”的概念，即若存在：

$$\lim_{h \rightarrow \infty} h \cdot \Gamma^2(h) = 2 \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^h \left(1 - \frac{\Delta z}{h}\right) \rho(\Delta z) d(\Delta z) = \delta_\mu \quad (5)$$

则对于充分大的 h ，有：

$$h \cdot \Gamma^2(h) \approx \delta_\mu \quad (6)$$

因而建议方差折减函数 $\Gamma^2(h)$ 采用下述形式：

$$\Gamma^2(h) = \begin{cases} 1 & (h \leq \delta_\mu) \\ \frac{\delta_\mu}{h} & (h > \delta_\mu) \end{cases} \quad (7)$$

式中： δ_μ 为相关距离。

相关距离 δ_μ 反映了土层中两个距离 Δz 的土性指标之间相关性的一个重要参数，在相关距离 δ_μ 范围内的土被认为土性强烈相关，而大于相关距离 δ_μ 的土则相互独立。根据式(7)，只要求出地基土土性指标的相关距离 δ_μ ，就可以得到方差折减函数 $\Gamma^2(h)$ 。

2 相关距离的计算方法

2.1 递推空间法

递推空间法是求解相关距离 δ_μ 的常用方法，

其是通过方差折减函数 $\Gamma^2(h)$ 的变化曲线来确定相关距离值。根据相关距离的定义， h 为土层厚度，即 $h = i \cdot \Delta z$ 。以相邻 i 个数据构成一个样本得出该样本的均方差 $\text{var}(h)$ ，依次类推随着 i 的逐渐增加，求出各个样本函数的均方差，进而得出每个数据样本的方差折减函数值。

每个数据样本的方差折减函数值计算式为：

$$\Gamma^2(h) = \frac{\text{var}(h)}{\sigma^2} \quad (8)$$

式中： $\text{var}(h)$ 为一个样本中数据 i 的空间均方差，其中 i 为取样间距的倍数； σ^2 为所有数据的点方差。

再绘制 $\Gamma^2(h)-h$ 的变化曲线，因 h 充分大时，相关距离 δ_μ 为一常数，故随着 h 的逐渐增大， $\Gamma^2(h)-h$ 曲线理论上逐渐趋于平稳，找出 $\Gamma^2(h)$ 的平稳点 h^* ，以该点为计算点，利用相关距离 $\delta_\mu = h^* \cdot \Gamma^2(h)$ 即可得出相关距离值。该方法虽然计算方便、易于理解，但由于岩土土性参数的离散性和不确定性等原因， $\Gamma^2(h)-h$ 曲线平稳点往往受人因素为影响较大，难以准确确定，影响了相关距离 δ_μ 的准确取值。

2.2 改进的递推空间法

针对传统递推空间法难于准确确定相关距离 δ_μ 的问题，张梅等^[8]从递推空间法的基本理论出发，取 $h \cdot \Gamma^2(h)-h$ 曲线峰值作为土性指标的相关距离，在一定程度上使得相关距离的取值更加合理。

根据随机场理论，由式(4)可得：

$$h \cdot \Gamma^2(h) = h \cdot \frac{2}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{\Delta z}{h}\right) \rho(\Delta z) d(\Delta z) = 2 \int_0^h \left(1 - \frac{\Delta z}{h}\right) \rho(\Delta z) d(\Delta z) = f(\Delta z) \quad (9)$$

式中： $f(\Delta z)$ 为 Δz 的函数。

对 $f(\Delta z)$ 求一阶偏导数，得：

$$\dot{f}(\Delta z) = \frac{1}{h^2} \int_0^h \Delta z \rho(\Delta z) d(\Delta z) \quad (10)$$

根据以往对岩土参数相关函数类型的研究发现：标准相关函数 $\rho(\Delta z)$ 的类型一般为单指数、

二次指数、均匀分布和三角分布, 即 $\dot{f}(\Delta z) \geq 0$, $f(\Delta z) = h \cdot \Gamma^2(h)$ 是以 δ_μ 为极限的非减函数, 故取 $h \cdot \Gamma^2(h) - h$ 曲线的极限值作为相关距离, 更加容易准确确定相关距离 δ_μ 的值。

3 随机场理论的工程应用

3.1 平稳性检验

为深入研究大小鱼山海域地基土的随机场统计特性, 结合大小鱼山地区围垦促淤过程中获得的大量地勘资料, 对本地区地基土的随机场特性进行分析。地基土土性指标满足平稳性和各态历经性检验是随机场理论应用的前提, 现对该地区大量静力触探试验 (CPT) 数据中的锥尖阻力 q_c 进行平稳性检验, 见图 1。可以看出, 淤泥质土层和粉质黏土层锥尖阻力 q_c 指标的集平均和相关函数 R 基本与横坐标轴平行, 仅有个别异常数据呈现轻微摆动, 这说明了锥尖阻力 q_c 的集平均和相关函数 R 都不随深度 h 的变化而变化, 该土性剖面随机场满足平稳性检验。

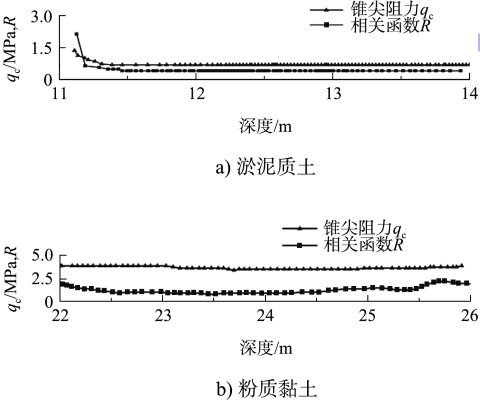


图 1 锥尖阻力 q_c 集平均与相关函数 R 随深度变化

3.2 各态历经性检验

对该地区大量静力触探试验 (CPT) 数据中的锥尖阻力 q_c 进行各态历经性检验, 见图 2。可以看出, 被检验淤泥质土层和粉质黏土层锥尖阻力 q_c

的集平均和相关函数 R 也呈现出与横坐标轴平行趋势, 仅个别异常数据轻微摆动。这说明了 q_c 的集平均和相关函数 R 都不随水平间距变化而变化, 该土性剖面随机场满足各态历经性检验。

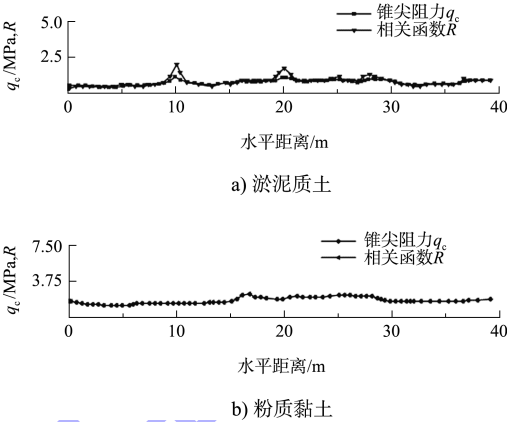


图 2 锥尖阻力 q_c 集平均与相关函数 R 随水平距离变化

平稳性和各态历经性检验都是针对沿深度方向的土性剖面随机场, 根据随机场原理: 地基土土性指标沿深度 h 方向的平稳性即沿水平方向各态历经性, 沿深度 h 方向各态历经性即沿水平方向的平稳性。因此, 只要土性指标沿深度 h 方向变化的土性剖面具有平稳性和各态历经性, 那么其沿水平方向也同样具有平稳性和各态历经性。

3.3 相关距离 δ_μ 计算

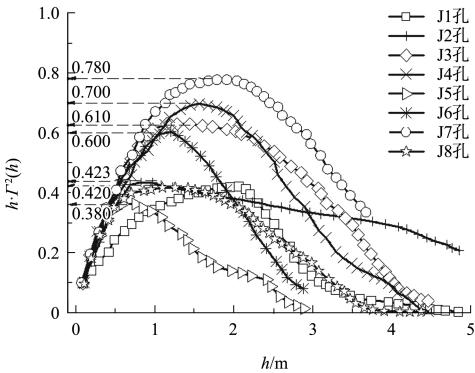
相关距离 δ_μ 是评价土性指标空间变异性的一个重要因子, 也是影响可靠性指标的重要参数, 经平稳性和各态历经性检验, 现采用改进的递推空间法对典型土层的相关距离 δ_μ 进行计算和分析, 8 个静力触探试验孔 (J1~J8) 中典型土层的相关距离值见表 1。其中淤泥质土层的相关距离最大值为 0.78 m, 最小值为 0.42 m, 均值为 0.54 m, 标准差为 0.15 m; 粉质黏土层的相关距离最大值为 0.635 m, 最小值为 0.365 m, 均值为 0.476 m, 标准差为 0.111 m。

表 1 各土层相关距离

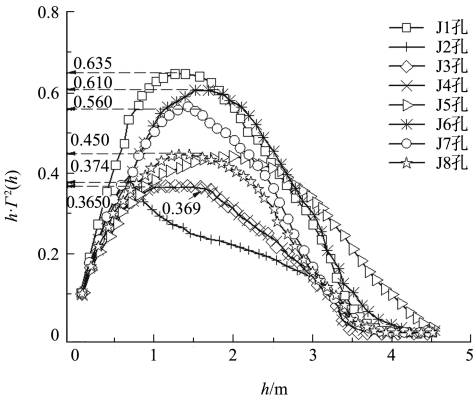
静探孔号	相关距离 δ_μ /m	
	淤泥质土层	粉质黏土层
J1	0.423	0.635
J2	0.430	0.365
J3	0.610	0.369
J4	0.700	0.374
J5	0.380	0.450
J6	0.600	0.610
J7	0.780	0.560
J8	0.420	0.450

由表 1 可看出，该地区淤泥质土层和粉质黏土层相关距离最大值相差 0.145 m，最小值相差 0.055 m，均值相差 0.064 m，相关距离的离散程度均在 0.12 左右。这表明，该地区淤泥质土和粉质黏土土性指标的相关距离值差别不大，各孔相关距离的离散程度也较小，可以作为该地区类似土层相关距离取值的参考。

根据式(11)，当土层厚度 $h \rightarrow \infty$ 时， $f(\Delta z) = h \cdot \Gamma^2(h)$ 是非减函数，其极限值为相关距离 δ_μ 。本次静探试验的读数间距为 10 cm，从图 3 的 $h \cdot \Gamma^2(h) - h$ 变化曲线发现，淤泥质土和粉质黏土均呈抛物线形式，而不是如理论分析那样无限接近于相关距离 δ_μ ，呈水平直线形式。这是由于对实际岩土工程应用来说，土层厚度是个有限值 χ ，并不是无限增大的，即当 $h = 0$ m 时， $\Gamma^2(h) = 1$ ， $h \cdot \Gamma^2(h) = 0$ ；当 $h = \chi$ ，点方差 $\sigma^2 = 0$ ， $\Gamma^2(h) = 0$ ， $h \cdot \Gamma^2(h) = 0$ ，即 $h \cdot \Gamma^2(h) - h$ 曲线形式为抛物线形式。



a) 淤泥质土



b) 粉质黏土

图 3 $h \cdot \Gamma^2(h) - h$ 变化曲线

通过对淤泥质土和粉质黏土相关距离 δ_μ 的分析可知，当 $h \cdot \Gamma^2(h)$ 达到峰值点时，前一递推计算点到峰值点相关距离的增长率有 90% 在 0.05 以内，其余 10% 大于 0.05 的土层厚度 h 均小于 2.0 m。也就是说当土层厚度 h 大于 2.0 m，取样间距为 10 cm 时，前一递推点到峰值点相关距离的增长率很小，取峰值点的纵坐标作为相关距离是合理的，这样不但满足岩土工程的误差要求，也更加接近实际结果。

3.4 方差折减函数 $\Gamma^2(h)$ 值的确定

方差折减函数 $\Gamma^2(h)$ 是实现土性指标由点特性到空间平均特性过渡的重要参数，本土层剖面符合一维高斯平稳齐次随机场模型，各土性指标的相关距离值和方差折减函数值基本相同。根据方差折减原理和典型土层的相关距离值 δ_μ 得出的各土层的方差折减函数值见表 2。

表 2 大小鱼山地区典型土层的方差折减函数 $\Gamma^2(h)$ 值

土层名称	相关距离 δ_μ /m		方差折减函数 值 $\Gamma^2(h)$	标准差 折减值
	变化范围	均值		
淤泥质土	0.420~0.780	0.540	0.450	0.671
粉质黏土	0.365~0.635	0.476	0.376	0.613

4 岸坡稳定的可靠度分析

4.1 地基土性指标的概率统计

根据前文求出的方差折减函数值对该地区抗剪强度指标黏聚力 c 、内摩擦角 φ 的方差进行折减，计算结果见表 3，其中 u 、 δ 、 δ' 分别表示均值、变异系数及折减后的变异系数。

表 3 抗剪强度指标统计结果

工程区域	主要土层	黏聚力 c			摩擦角 φ		
		u_c/kPa	δ_c	δ'_c	$u_\varphi/(\text{^\circ})$	δ_φ	δ'_φ
中隔堤	淤泥质土	11.4	0.36	0.194	15.4	0.18	0.08
	粉质黏土	18.4	0.41	0.24	17.1	0.16	0.072
二期东侧堤	淤泥质土	11.6	0.38	0.19	15.3	0.20	0.09
	粉质黏土	17.4	0.40	0.23	16.8	0.20	0.12
二期北堤	淤泥质土	12.1	0.34	0.165	15.8	0.21	0.10
	粉质黏土	17.8	0.43	0.22	16.4	0.19	0.08

4.2 可靠度分析

岸坡稳定性与黏聚力、内摩擦角和孔隙水压力等因素有关，按照简化的 Bishop 方法建立数学模型分析岸坡的稳定性，由此可得出岸坡稳定性极限状态方程^[9]：

$$\sum_{i=1}^n \frac{c_i b_i \cos \theta_i + (\rho_i g V_i - u' b_i \cos \theta_i) \tan \varphi_i}{\cos \theta_i + \tan \varphi_i \sin \theta_i} - \sum_{i=1}^n \rho_i g V_i \sin \theta_i = 0$$

(11)

式中： c_i 、 φ_i 为黏聚力、内摩擦角，为随机变量； ρ_i 、 θ_i 、 b_i 、 V_i 、 u' 分别为密度、土坡倾角、滑条宽度、体积、孔隙水压力，均为确定量。

根据极限状态方程，采用验算点法进行可靠度分析，分别得到了考虑相关性及非相关性的可靠度指标，见表 4。

表 4 可靠度计算结果

工程区域	安全系数 k	方差折减		方差不折减	
		可靠度指标 β	失效概率 $P_f/\%$	可靠度指标 β	失效概率 $P_f/\%$
中隔堤	1.21	4.45	0.002	2.30	0.610
二期东侧堤	1.24	3.58	0.012	2.14	1.540
二期北堤	1.26	4.41	0.001	2.34	0.860
平均化	1.24	4.15	0.005	2.26	1.003

由表 4 可知，安全系数 k 范围为 1.21~1.26，平均约 1.24，若不经方差折减，可靠度指标 β 在 2.14~2.34，失效概率 P_f 达到 1.003%，与工程实际相差较大。而经方差折减后，可靠度指标 β 在 3.58~4.45，失效概率 P_f 达到 0.005%，较符合安全系数对应的工程实际。这说明传统计算方法偏于保守，而引入随机场理论后，计算的结

果更符合建筑物受荷的实际情况，更具有合理性。

5 结语

1) 针对土层形成特点及传统地基可靠度分析方法所存在的问题，对随机场理论进行分析和研究，论证了引入随机场理论对地基可靠度分析的重要意义。

2) 基于随机场理论，证明采用改进的递推空间法更容易获得土性指标的相关距离值，并采用该方法确定大小鱼山地区典型土层的相关距离和方差折减函数值，为本地区用随机场理论进行可靠度分析提供了参考。

3) 将该地区得出的方差折减函数值应用到岸坡可靠度分析中，经过对传统方法和方差折减后所得到的可靠度指标进行对比分析，证明将随机场理论引入可靠度分析中更符合工程实际安全程度，具有重要的应用和推广价值。

参考文献：

[1] 谭文耀,蔡美峰.边坡工程广义可靠度理论与实践[M].北京:科学出版社,2010.

[2] 洪昌华,龚晓南,赵良荣.土性空间变异性的统计模拟[J].浙江大学学报(工学版),2000,34(5):527-530.

[3] 姚耀武,陈东伟.土坡稳定可靠度分析[J].岩土工程学报,1994,16(2):80-87.

[4] 丁继辉,梁国金,张建平,等.地基工程可靠度设计原理与应用[M].北京:中国水利水电出版社,2010.

[5] 贾晓黎.土剖面的随机场特性及其应用研究[D].天津:天津大学,1995.

(下转第 64 页)