

· 综 合 ·



基于双层 Boussinesq 方程的聚焦波数值模型^{*}

周 丰¹, 刘忠波^{2,3,4}, 房克照^{3,4}, 焦子峰³

(1. 中交水运规划设计院有限公司, 北京 100007; 2. 大连海事大学 交通运输管理学院, 辽宁 大连 116026;
3. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;
4. 长沙理工大学 水沙科学与水灾害防治湖南省重点实验室, 湖南 长沙 410076)

摘要: 基于高精度双层 Boussinesq 方程, 建立了聚焦波的时域波浪数值水槽。时间积分采用混合 4 阶 Adams-Bashforth-Moulton 预报-校正格式, 聚焦波生成则采用累加不同频率规则波的内部造波源项法。针对 Baldock 等的聚焦波试验进行数值计算, 计算结果与试验数据吻合较好。利用验证后模型进一步考察了非线性对数值计算聚焦波的影响, 其中考虑了强非线性、弱非线性以及线性 3 种情况, 结果表明非线性对精确模拟聚焦波至关重要, 强非线性模型给出的结果最好, 弱非线性次之, 线性最差。

关键词: 聚焦波; Boussinesq 方程; 色散性; 非线性; 数值模型

中图分类号: P 731.22 文献标志码: A 文章编号: 1002-4972(2015)09-0010-06

Numerical model of focusing wave based on two-layer Boussinesq equations

ZHOU Feng¹, LIU Zhong-bo^{2,3,4}, FANG Ke-zhao^{3,4}, JIAO Zi-feng³

(1. CCCC Water Transportation Consultants Co., Ltd., Beijing 100007, China;

2. Transportation Management College, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China;

3. The State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

4. Water Science and Water Hazard Prevention Key Laboratory of Hunan Province, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410076, China)

Abstract: The predictor-corrector-iteration algorithm in the framework of finite difference method was applied to solve one-dimensional version of two-layer Boussinesq equations, creating a numerical wave tank for focusing wave in time domain. A fourth-order composite Adams-Bashforth-Mouton scheme was adopted for time integration. The internal wave method of summing multi-frequency wave components was used to realize wave focusing in computational domain. Numerical experiments were conduct to reproduce the laboratory measurements of Baldock, and the agreements between the computed results and experimental data were good. Further discussions were carried out to investigate nonlinear effect on the computed results of focusing wave by considering different levels of nonlinearity (strong nonlinearity, weak nonlinearity and linearity) in the numerical model. The results show that nonlinearity plays a very important role in accurately modeling focusing wave. The present model with strong nonlinear terms presents the best results, the weakly nonlinearity presents reasonable results, while the linear model presents the worst.

Keywords: focusing wave; Boussinesq equations; dispersivity; nonlinearity; numerical model

收稿日期: 2015-01-11

^{*}基金项目: 国家自然科学基金 (51009018); 国家创新研究群体科学基金 (50921001); 水沙科学与水灾害防治湖南省重点实验室基金 (2012SS02, 2013SS02)

作者简介: 周丰 (1980—), 男, 博士, 高级工程师, 从事水动力学方面的研究工作。

实际海浪波列中存在着畸形波,其波高很大(通常为有效波高的 2.2 倍以上),尽管发生概率很小,但其蕴含的巨大能量有可能对钻井平台等海洋工程建筑物和过往的船舶带来毁灭性破坏。由于现场测量困难,对其产生的过程缺乏深入研究。Kharif 等较为全面地分析了其形成机理,他认为不同频率波浪叠加、波流相互作用、地形的变化、表面风作用、非线性波浪不稳定性等都可能诱发畸形波^[1]。为了研究聚焦波,国内外学者采用试验或数值模拟的方式进行了大量的研究,其中 Baldock 等采用二维水槽进行了聚焦波的试验研究^[2];柳淑学试验研究了三维水池中极限波浪的产生^[3];黄国兴研究了各种模拟畸形波的方法^[4];裴玉国等采用线性模型研究了定点生成畸形波的方法^[5];赵西增等利用其所建立的高阶谱模型,进行了聚焦波和不同形式波浪组合产生畸形波的研究^[6-7];宁德志等采用高阶边界元求解 Laplace 方程,研究了如何生成聚焦波以及水流对聚焦波的作用^[8-9]。以上数值研究利用的模型有所不同,但要准确模拟聚焦波需要满足:1)模型的色散适用精度能涵盖所有频率;2)在色散精度范围内模型同时具有良好的非线性。

线性波浪理论形成的聚焦波是一种纯粹线性叠加,已不能准确预报聚焦波的最大波峰、聚焦波产生的时间和聚焦地点^[2, 7-9],其根本原因是这种模型不能考虑波-波非线性相互作用。为克服这一缺陷,有些学者采用具有完全非线性特征的 Laplace 方程对聚焦波进行数值研究^[8-9]。基于高阶边界元求解 Laplace 方程较为准确,但是其计算时间较长,当空间步长较小时或对于三维问题,其计算效率问题更为突出。Boussinesq 类水波方程兼具色散性和非线性特征,计算效率较高,具备模拟聚焦波的潜质,但针对聚焦波的研究非常有限。Sun 等^[10]、罗洵等^[11]应用 Boussinesq 方程开展过聚焦波的研究,前者应用改进型的 Boussinesq 方程模拟了三维聚焦波和圆柱的相互作用,后者进行了潜堤上的聚焦波数值研究。这些工作较好地拓展了 Boussinesq 方程在聚焦波方面的数值应用,但

他们均没有讨论方程本身的非线性对计算结果产生的影响。Sun 等^[10]采用的是 Beji 和 Nadaoka 的二阶色散性方程^[12],其方程色散精度在 5% 的误差下适用范围为 $kh < 3.14$,非线性精度和经典 Boussinesq 方程一样^[13],因此该模型不适于计算波高较大的非线性波浪问题;罗洵等^[11]采用了 Madsen 和 Schaffer 的方程^[14],其色散精度在 2% 误差下适用范围为 $kh < 6.28$,非线性精度在 10% 误差下适用范围为 $kh < 1.6$ 左右,这导致其非线性与线性性能不匹配,模拟中也不能充分展示其色散性优势。为此,本文以刘忠波等给出的 2 个以水深平均速度表达的双层 Boussinesq 方程为基础^[15],建立聚焦波浪数值水槽,对累加规则波形成聚焦波的试验开展数值模拟研究,并考察非线性对数值结果的影响。

1 双层 Boussinesq 方程

刘忠波等推导了 3 组适用于渗透地形上的高阶 Boussinesq 方程^[15],当忽略渗透影响时,方程可转化为双层水体 Boussinesq 方程,本文选择以 2 个水深平均速度表达方程为模型,该模型上层和下层水体的动量方程以及连续方程可以表示如下:

$$\bar{\mathbf{u}}_{1t} + \nabla \eta + \varepsilon \bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_1 + \mu^2 \{ T_{m0} + \varepsilon T_{m1} + \varepsilon^2 T_{m2} + \varepsilon^3 T_{m3} \} = O(\mu^4) \quad (1)$$

$$T_{m0} = h\Gamma_{1t} - \frac{1}{2}h_1 \nabla \nabla \cdot (h_2 \bar{\mathbf{u}}_{2t}) + \beta_1 (h_1 + \gamma_1 \eta) \mu^2 \nabla \nabla \cdot [(h_1 + \gamma_1 \eta) (\bar{\mathbf{u}}_{1t} + \nabla \eta + \varepsilon \bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_1)] \quad (2)$$

$$T_{m1} = \nabla [-\eta \nabla \cdot (h_1 \bar{\mathbf{u}}_{1t} + h_2 \bar{\mathbf{u}}_{2t}) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (h_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + h_2 \bar{\mathbf{u}}_2)^2] + \frac{1}{2} \eta \nabla \nabla \cdot (h_2 \bar{\mathbf{u}}_{2t}) - \eta \Gamma_{1t} + \nabla \cdot (h_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + h_2 \bar{\mathbf{u}}_2) [\Gamma_1 - \frac{1}{2} \nabla \nabla \cdot (h_2 \bar{\mathbf{u}}_2)] + \nabla \{ \bar{\mathbf{u}}_1 [h_1 \Gamma - \frac{1}{2} h_1 \nabla \nabla \cdot (h_2 \bar{\mathbf{u}}_2)] \} \quad (3)$$

$$T_{m2} = \nabla [-\frac{1}{2} \eta^2 \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_{1t} - \bar{\mathbf{u}}_1 \eta \nabla \nabla \cdot (h_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + h_2 \bar{\mathbf{u}}_2) + \eta \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 \nabla \cdot (h_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + h_2 \bar{\mathbf{u}}_2)] + \frac{1}{6} \eta^2 \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_{1t} - \frac{1}{3} \eta [\nabla \cdot (h_1 \bar{\mathbf{u}}_1) + \nabla \cdot (h_2 \bar{\mathbf{u}}_2)] \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 -$$

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot (\eta \bar{\mathbf{u}}_1) \nabla \nabla \cdot (h_2 \bar{\mathbf{u}}_2) + \nabla \cdot (\eta \bar{\mathbf{u}}_1) \Gamma_1 + \nabla \{ \bar{\mathbf{u}}_1 [\eta (\nabla \nabla \cdot (h_2 \bar{\mathbf{u}}_2) - \Gamma_1)] \} \quad (4)$$

$$T_{m3} = \nabla [-\frac{1}{3} \eta^2 \bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{2} \eta^2 (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_1)^2] - \frac{1}{3} \eta \nabla \cdot (\eta \bar{\mathbf{u}}_1) \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 \quad (5)$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{2} \nabla \nabla \cdot (h_1 \bar{\mathbf{u}}_1) + \frac{1}{6} h_1 \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{2t} + \nabla \eta + \varepsilon \bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_2 + \mu^2 (T_{m10} + \varepsilon T_{m11} + \varepsilon^2 T_{m12} + \varepsilon^3 T_{m13}) = O(\mu^4) \quad (7)$$

$$T_{m10} = \nabla [-h_1 \nabla \cdot (h_1 \bar{\mathbf{u}}_{1t} + h_2 \bar{\mathbf{u}}_{2t}) + \frac{1}{2} h_1^2 \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_{1t}] + \Gamma_{2t} + \beta_2 (h_2 + \gamma_2 \eta) \mu^2 \nabla \nabla \cdot [(h_2 + \gamma_2 \eta) (\bar{\mathbf{u}}_{2t} + \nabla \eta + \varepsilon \bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_2)] \quad (8)$$

$$T_{m11} = \nabla \{ -\bar{\mathbf{u}}_2 \nabla h_1 [\nabla \cdot (h \bar{\mathbf{u}}_2) - h_1 \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_2] + \frac{1}{2} [\nabla \cdot (h \bar{\mathbf{u}}_2) - h_1 \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_2]^2 \} + \nabla \{ -\eta \nabla \cdot (h_1 \bar{\mathbf{u}}_{1t} + h_2 \bar{\mathbf{u}}_{2t}) + \bar{\mathbf{u}}_1 [-h_1 \nabla \nabla \cdot (h_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + h_2 \bar{\mathbf{u}}_2) + \frac{1}{2} h_1^2 \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_1] - \frac{1}{2} [-\nabla \cdot (h_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + h_2 \bar{\mathbf{u}}_2) + h_1 \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_1]^2 \} + \nabla (\bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \Gamma_1) \quad (9)$$

$$T_{m12} = -\nabla [\frac{1}{2} \eta^2 \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_{1t} + \bar{\mathbf{u}}_1 \eta \cdot \nabla \nabla \cdot (h_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + h_2 \bar{\mathbf{u}}_2) - \eta \nabla \cdot (h_1 \bar{\mathbf{u}}_1 + h_2 \bar{\mathbf{u}}_2) \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_1] \quad (10)$$

$$T_{m13} = \frac{1}{2} \nabla [-\eta^2 \bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_1) + \eta^2 (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_1)^2] \quad (11)$$

$$\Gamma_2 = -\frac{1}{2} h_2 \nabla [\nabla \cdot (h_2 \bar{\mathbf{u}}_2)] + \frac{1}{6} h_2^2 \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_2) \quad (12)$$

$$\eta_t + \nabla \cdot [(h_1 + \varepsilon \eta) \bar{\mathbf{u}}_1] + \nabla \cdot (h_2 \bar{\mathbf{u}}_2) = 0 \quad (13)$$

式中: η 为波面升高; $\bar{\mathbf{u}}_1$ 和 $\bar{\mathbf{u}}_2$ 表示上层和下层水深积分平均的速度矢量; h 为静水深, h_1 和 h_2 表示上层和下层水深; g 为重力加速度; ∇ 是二维微分算子; ε 是波浪场中特征波幅和水深的比值; μ^2 是特征水深和特征波长比值的平方; $\beta_1 = -0.056$, $\beta_2 = -0.113$, $\gamma_1 = 4.9$, $\gamma_2 = 2.9$ 为控制参数 ($h_1 = h_2$)。方程的相速度和二阶非线性波幅见图 1。为比较起见, 图 1 也给出 Zou 等^[16] 推导的 4 阶全非线性 BouN4D4 方程的性能曲线 (其可作为高阶

全非线性 Boussinesq 方程代表)。可见, 本文模型色散精度与 BouN4D4 的相当^[16]; 但非线性性能比该方程好, 非线性在 10% 误差下可适用于 $kh \leq 6$ 。此外方程的表达形式也较 BouN4D4 简单, 这有利于数值离散和程序编制。

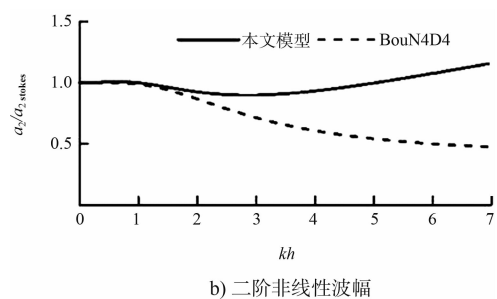
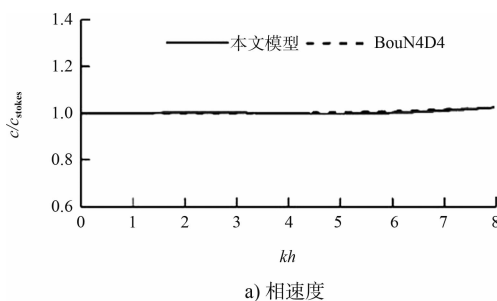


图 1 方程的相速度和二阶非线性波幅

2 数值模型

对方程(1)~(13)一维数值求解的具体流程类似于文献[17-18]。对 2 次和 3 次导数取 2 阶精度差分格式, 对 1 次空间导数采用 5 点 4 阶精度差分格式。时间积分采用混合 4 阶 Adams-Bashforth-Moulton 预报-校正格式^[17-18]。上述离散方式能保证离散误差的阶高于方程自身色散性精度。计算域两端设置全反射固壁边界条件, 采用内部造波方法和计算域末端设置海绵层的方法减少反射^[19]。需要注意的是 Gobbi 等的内部造波源项方法仅适用于规则波的生成^[19], 为生成聚焦波, 对之进行改进, 即将波谱进行等分, 每一组成部分均视为单色波, 针对每一组成部分应用 Gobbi 等的内部造波源项方法, 然后叠加生成畸形波的内部源项信号。

3 数值模型验证和讨论

针对 Baldock 等进行的聚焦波试验进行模拟^[2],

试验水槽长 20 m、宽 0.3 m，水深为 0.4 m，波浪参数见表 1，在每一次试验中，在周期范围内将波浪等分为 29 份波幅相当的组成波。试验中最小周期为 0.5 s，其波长约为 0.4 m，对应的无因次水深 kh 约为 6，从理论角度看，无论是色散性还是非线性性能均在本文所建立模型的精度范围内。

表 1 输入波浪参数		
工况	周期范围/s	频率范围/s ⁻¹
A	0.5≤T≤1.5	0.66≤f≤2
B	0.6≤T≤1.4	0.71≤f≤1.66
C	0.7≤T≤1.3	0.77≤f≤1.42
D	0.8≤T≤1.2	0.83≤f≤1.25

为便于后文阐述，将 Baldock 等试验的主要结论汇总如下：1) 随着入射波幅增大，形成的聚焦波波幅也越来越大，表现为波浪之间的非线性相互作用越来越强。2) 随着波幅的增大，线性理论和二阶 Stokes 波理论已不能准确模拟，主要表现为它们模拟的最大波幅小于试验最大波幅，且在最大峰值两侧的波幅也很难准确预报，在聚焦点位置和聚焦点上，也不能精确预报。3) D 组波浪谱最窄，形成的聚焦波幅值最大。

3.1 模型验证

数值模拟时，数值波浪水槽长 30 m，计算时间为 20 s，空间步长 0.01 m，时间步长 0.005 s，造波源项设置在 $x = 10$ m，两端设置 8 m 长的海绵边界层。这里选择非线性最强的工况 B 和 D（波幅为 5.5 cm）进行数值模拟，计算结果与试验结果的比较见图 2。由图 2 可见，主峰幅值（聚焦点）、主峰两侧的波谷和次峰波峰幅值，数值与试验吻合程度很高，反映出模型具有很好的性能。进一步观察聚焦点两侧的波谷和次峰波峰幅值，可以发现波谷幅值均大于对应的次峰幅值。

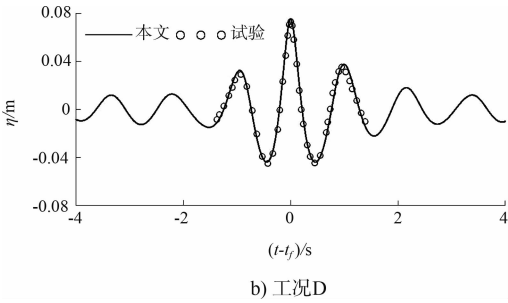
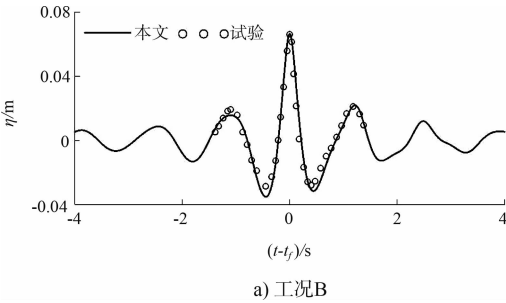


图 2 聚焦波位置波面时间历程与试验结果的比较

3.2 非线性对计算结果的影响

下面着重考察非线性对数值结果的影响，模型在不考虑非线性（忽略所有非线性项）、弱非线性（仅保留 $O(\varepsilon)$ 项）以及强非线性（保留全部非线性）下，选取工况 D（ $A = 5.5$ cm）进行比较，具体计算结果见图 3。可见，线性方程不能描述非线性相互作用，效果最差，尤其是不能准确捕捉到峰值波。弱非线性计算结果略低于试验结果，其总体精度优于线性方程；强非线性方程模拟效果最好。

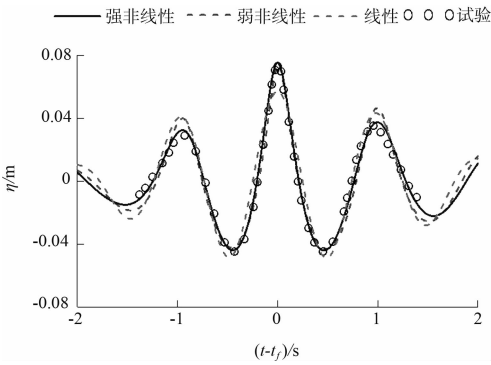


图 3 非线性对计算结果的影响

进一步分析非线性对聚焦时间、聚焦位置以及聚焦最大波幅的影响，针对工况 D 不同波幅情况进行了数值模拟，计算结果与试验结果的比较见图 4，图 4 也给出了文献[9]采用高阶边界元求解 Laplace 方程的计算结果。整体来看强非线性模拟效果最好，线性模拟的效果最差，弱非线性模拟效果居中。进一步比较可知：

1) 关于峰值波幅，强非线性方程比弱非线性方程的计算效果略好，其与试验吻合程度最高，弱非线性方程的计算结果与文献[9]的计算结果相差不大。

2) 关于聚焦位置, 线性方程随入射波幅变化并不发生明显变化, 其与依据线性理论设定的聚焦位置基本一致, 不适于求解非线性聚焦波问题, 若不考虑非线性, 采用 Boussinesq 方程进行模拟就失去意义。弱非线性计算结果明显优于线性的, 明显比强非线性差。

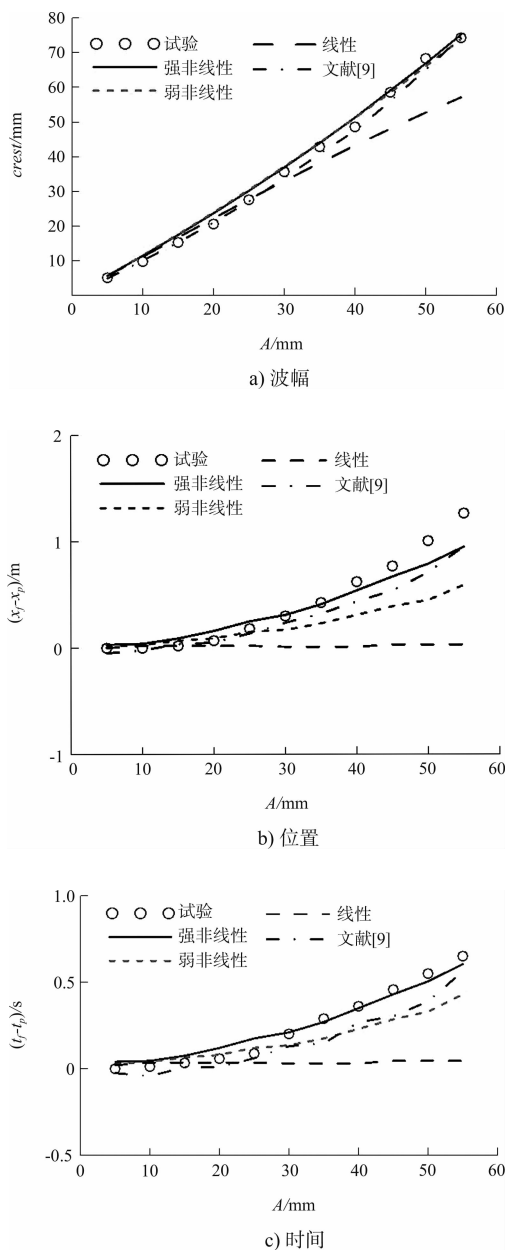


图 4 非线性对聚焦峰值波幅、位置和时间的影响

3) 关于聚焦时间, 类似于聚焦位置得到的结论。非线性的存在, 使得聚焦时间、聚焦位置, 比设定的位置往后延迟。强非线性方程能较为正确地诠释较大波幅离散引起的频散效应, 弱非线性

方程则不能揭示这种情况。作为具有精确色散关系和全非线性特征的 Laplace 方程来说, 文献[9]计算效果并不完美, 这可能是因为其计算中采用空间步长约为 0.05 m, 大步长可能“抹杀”非线性相互作用引起高频部分波幅, 进而影响到聚焦时间和聚焦位置。

3.3 谱宽对聚焦波的影响

针对工况 A、B、C 和 D 波幅为 5.5 cm 的情况进行模拟, 研究谱宽对聚焦波的影响, 波面的时间历程对比见图 5a)。由图 5a) 可见, 从 A 到 D 谱宽变小, 聚焦点处峰值也越大, 两侧的波谷以及次峰幅值也越大。这是不是意味着再进一步减小, 会激发更大的聚焦波? 设置两组 $0.85\text{ s} \leq T \leq 1.15\text{ s}$ (E 组) 和 $0.9\text{ s} \leq T \leq 1.1\text{ s}$ (F 组), 其他条件一样, 进行了数值模拟试验, 见图 5b)。数值结果表明, 随着谱宽进一步减小, 聚焦最大波幅反而下降, 而主峰两侧的波谷、次峰幅值增大, 由此可以推断: 当入射波幅固定, 围绕某一固定周期, 存在某一谱宽 (在波浪破碎前) 可以产生一个最大的聚焦波波幅。围绕着这一固定谱宽, 无论是加大还是减小谱宽, 聚焦波波幅都将减小。

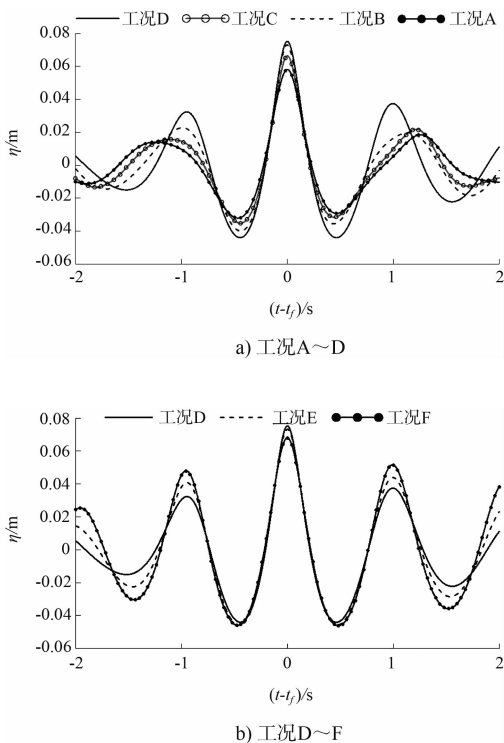


图 5 谱宽对聚焦波的影响

4 结论

基于近似到二阶完全非线性的双层 Boussinesq 方程,建立了聚焦波数值水槽,通过数值研究得到以下主要结论:

1) 数值计算结果与试验结果吻合程度较高,在方程适用范围内,本文模型可以较为准确地模拟聚焦波。

2) 强非线性在模型中扮演着重要角色,其对精确模拟聚焦时间、聚焦地点至关重要;而线性化的 Boussinesq 模型是没有意义的,其不能很好地模拟聚焦波问题;在非线性不强的算例中,弱非线性模型也能较为合理地模拟聚焦波,在考虑到非线性较强的算例中,其不能准确模拟聚焦时间和聚焦地点。

3) 以多个频率波浪形成的聚焦波为例,围绕一固定周期,存在一谱宽,其会产生最大的聚焦波。

本文的聚焦波是一种瞬态波浪,然而考虑到实际波浪是不规则的,下一步研究将有针对性地选择各种海浪谱和聚焦波的组合模型进行数值研究,研究不同谱下形成聚焦波的形成、发展以及波浪破碎等相关问题。

致谢:赵西增、宁德志两位博士在聚焦波造波等问题上的讨论使笔者完善了本文,在此表示感谢。

参考文献:

[1] Kharif C, Pelinovsky E. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon[J]. Euro J Mech B/Fluids, 2003, 22: 602-634.

[2] Baldock T E, Swan C, Taylor P H. A laboratory study of nonlinear surface wave in water [J]. Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1996, 354: 649-676.

[3] 柳淑学,洪起庸. 三维极限浪的产生方法及特性[J]. 海洋学报, 2004, 26(6): 133-142.

[4] 黄国兴. 畸形波的模拟方法及基本特性研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2002.

[5] 裴玉国,张宁川,张运秋. 畸形波数值模拟和定点生成[J]. 海洋工程, 2006, 24(4): 20-26.

[6] 赵西增,孙昭晨,梁书秀. 模拟畸形波的聚焦波浪模型[J]. 力学学报, 2008, 40(4): 447-454.

[7] 赵西增,孙昭晨,梁书秀. 高阶谱数值方法及应用[J]. 船舶力学, 2008, 12(5): 685-691.

[8] 宁德志,滕斌,谭丽,等. 完全非线性聚焦波浪的数值模拟[J]. 水科学进展, 2008, 19(6): 875-881.

[9] 宁德志,卓晓玲,滕斌,等. 水流对聚焦波特性影响的数值模拟[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2013, 34(5): 556-561.

[10] Sun Zhongbin, Liu Shuxue, Li Jinxuan. Numerical study of multidirectional focusing wave runup[J]. Journal of Hydrodynamics, 2012: 86-96.

[11] 罗洵,马玉祥. 聚焦波浪在潜堤上传播变形的数值模拟[J]. 工程力学, 2013: 30(4): 466-470.

[12] Beji S, Nadaoka K. A formal derivation and numerical model of the improved Boussinesq Equations for varying depth[J]. Ocean Engineering, 1996, 23(8): 691-704.

[13] Peregrine D H. Long waves on a beach[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1967, 27(4): 815-827.

[14] Madsen P A, Schäffer H A. Higher ~ order Boussinesq ~ type equations for surface gravity waves: Derivation and analysis[J]. Phil Trans R Soc Lond A, 1998, 356: 3 123-3 184.

[15] 刘忠波,房克照,孙昭晨. 适合可渗海床上波浪传播的高阶 Boussinesq 方程[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2013, 34(9): 1 100-1 107.

[16] Zou Z L, Fang K Z. Alternative forms of higher order Boussinesq equations: derivations and Validations [J]. Coastal Engineering, 2008, 55(6): 506-521.

[17] Lynett P, Liu L F. A two-layer approach to wave modeling[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series b-Biological Sciences: A, 2004, 460: 2 637-2 669.

[18] 刘忠波,孙昭晨,房克照. 波浪在渗透海床上传播的数学模型及其验证[J]. 大连理工大学学报, 2013, 53(3): 417-422.

[19] Gobbi M F, Kirby J T. Wave evolution over submerged sills: Tests of a high-order Boussinesq model[J]. Coastal Engineering, 1999, 37: 57-96.

(本文编辑 武亚庆)