

· 综 合 ·



椭圆余弦波浅水变形实用算法 (II)

——对《海港水文规范》的一个补充

贺 铭, 邱大洪

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 针对我国《海港水文规范》中基于线性波浪理论的浅水变形计算现状, 本文的第 I 部分提出了建立在椭圆余弦波理论基础上的浅水变形实用算法 (PCM), 用于计算沿直线传播的波浪的浅水变形。在其基础上, 考虑了海底地形变化引起的波浪折射影响, 使得 PCM 方法能拓展用于缓变水域近岸浅水波要素的计算。最后给出一个算例, 采用 PCM 方法分别计算了不同外界因素 (理想情况、风、海底摩擦、风及海底摩擦) 作用下的浅水变形结果, 并与商业软件 DHI-MIKE21 的计算结果进行比较, 结果比较吻合。

关键词: 浅水变形; 椭圆余弦波; 波浪折射; 实用算法 (PCM)

中图分类号: TV 193.2

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2015)04-0013-06

Practical calculation method of cnoidal wave shoaling (II): a supplement to *Code of Hydrology for Sea Harbor*

HE Ming, QIU Da-hong

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: In view of the present shoaling calculation method in the *Code of Hydrology for Sea Harbor*, a practical calculation method (PCM) of wave shoaling was proposed in the part I of this paper. It was used for the shoaling calculation of a cnoidal wave propagating in a straight line. On the basis of the research in the part I, wave refraction caused by variations in bathymetry is considered. Thus, the PCM method is extended to be able to compute shallow wave parameters over slowly varying bathymetry. In the final section, a numerical example is given. It is solved with the PCM method under different external factors conditions (ideal condition, wind, bottom friction and wind & bottom friction) separately. The results are compared with those obtained via the commercial software DHI-MIKE21, and proved to be in good agreement in terms of wave parameters values.

Keywords: wave shoaling; cnoidal wave; wave refraction; practical calculation method (PCM)

目前, 我国《海港水文规范》(以下简称《规范》)中波浪浅水变形的计算是基于线性波浪理论^[1], 且忽略了外界因素的影响。为此, 文献[2]提出了建立在椭圆余弦波理论基础上的浅水变形实用算法 (PCM)。该方法基于波浪传播过程中能量守恒的原理, 考虑了风和海底摩擦两种主要外界因素的影响, 可用于计算沿直线传播的波浪浅水变形问题。但对于实际工程海域, 由于受海底复杂地形的影响, 波浪向浅水区域传播过程中

将发生折射。折射作用使得波向线弯曲继而产生发散或集聚, 波能也因此辐散或辐聚, 形成波高的减小或增大, 因此波浪浅水变形的计算还需绘制波浪折射图。

波浪折射图的绘制方法主要有两种: 一种是根据线性波浪理论假定, 由 Snell 定律计算波向线的变化, 并由手工方法绘制波浪折射图, 该方法适用于水下地形较为简单的近岸海域, 在《规范》^[1]中有详细介绍; 另一种是基于缓坡方程或稳

收稿日期: 2014-04-23

作者简介: 贺铭 (1988—), 男, 博士研究生, 从事海岸和近海工程数值模拟研究。

定谱模型的数值计算方法,如美国海岸水动力实验室编写的《Coastal Engineering Manual》^[3] (以下简称《CEM》)中提到的 PCPWAWE^[4]、REFDIF^[5]和 STWAVE^[6]等数值模型,需借助计算机求解,可处理具有相对复杂地形的近岸海域上的波浪传播问题,且可一定程度上考虑外界因素的影响。在我国,一个海岸工程的初步设计阶段,工程所在地的各项勘察资料一般尚不完备,往往需要根据波浪观测站的观测数据通过对规则波的折射计算来推算工程所在地的波浪要素。《规范》中虽列出了手工波浪折射图绘制的相关条文,但在计算波向线折射角时仍是基于线性波浪理论。

本文提出了一种基于椭圆余弦波理论的波浪折射图绘制方法,同文献[2]中给出的考虑风和海底摩擦影响的沿直线传播椭圆余弦波浅水变形计算方法一起,构成了完整的椭圆余弦波浅水变形实用算法(PCM)。采用 PCM 方法,计算了一个具体算例,并与商业软件 DHI-MIKE21 的计算结果进行了比较。

1 波浪折射图的绘制

基于椭圆余弦波理论的波浪折射图绘制方法是:首先假设在折射点(平均等深线)处,波浪折射前后波高不变, $H_i = H_{i-1}$, 仅水深发生改变(实际上折射后的波高是改变的,需经由后续步骤迭代修正)。由图 1^[7]查得波浪折射后与折射前的波速比 c_i/c_{i-1} , 再由 Snell 定律计算折射后的波向线入射角 α_i (波向线与等深线法线的夹角):

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_{i-1}} = \frac{c_i}{c_{i-1}} \quad (1)$$

以此 α_i 绘制水深为 d_i 的等深区内的波向线,量取波浪传播距离 ΔS_i , 按文献[2]中所述的方法计算该传播段内波高的改变,继而得到考虑外界因素影响的折射后波高 H'_i 。由这个 H'_i 再次计算波浪折射前后的波速比 c'_i/c_{i-1} 和折射后的波向线入射角 α'_i 。如此往复,直到相邻两次迭代得到的 α'_i 差别较小时为止,但一般情况下迭代一次即可。此外,波浪折射还使得相邻波向线间距 b 发生改变,考虑折射后的波高需乘以折射系数 $K_r = (b_{i-1}/b_i)^{1/2}$ 。因此,在绘

制波浪折射图时,需同时绘制 2 条将工程所在地包含在内的波向线,如图 2 中的波向线 A_1B_1 和 A_2B_2 。

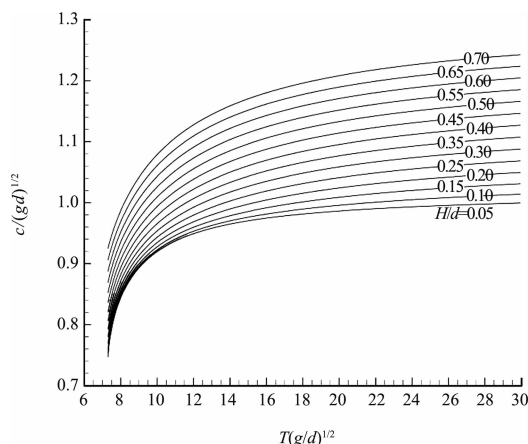


图 1 椭圆余弦波波速与波要素的关系曲线

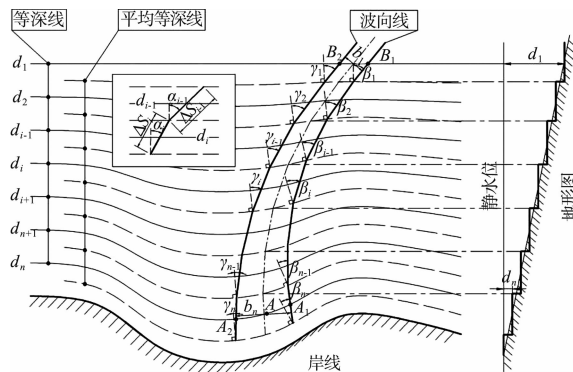


图 2 波浪折射示意

以波向线间距变化 b_n/b_1 和波浪总传播距离 $\Sigma \Delta S$ 的改变程度为判定标准,进行了大量计算。结果表明在平缓海滩上当波向线入射角 $\alpha_1 < 45^\circ$ 或入射波高 $H_1/d_1 < 0.5$ 时,风和海底摩擦对波浪折射图的绘制影响小于 5%,可以忽略。但考虑到在上述椭圆余弦波折射图绘制方法中,波浪折射图的绘制是和浅水波要素的计算是同步进行的,绘制波浪折射图的过程中考虑风和海底摩擦的影响并不会增加额外的工作量,因此一般情况下不必忽略外界因素对波浪折射图的绘制影响。

2 算例

某海域规划修建一近海工程,初步勘测的海底地形见图 3,工程所在地的等深线为 -5 m。该海域的主要来波方向和风向是 NNE 向,根据推算,在 -12 m 等深线处的年平均波高、波周期和

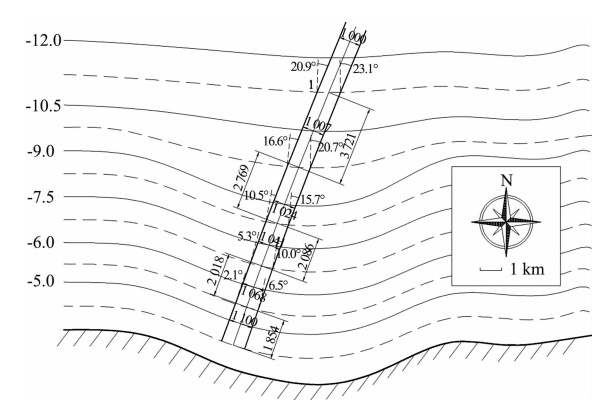


图 3 近岸海域地形图和绘制的波向线 (单位: m)

海面风速分别为 3 m、9 s 和 20 m/s。根据海底沉积物的性质和海底坡度的不同, 将 -12 m 等深线至工程所在地区区间分成两段: 第 1 段从 -12 m 等深

线到 - 6 m 等深线处, 主要是淤泥型海底 ($f=0.01$); 第 2 段从 - 6 m 等深线到 - 5 m 等深线, 主要是砂质海底 ($f=0.015$)。

2.1 浅水变形实用算法 (PCM)

2.1.1 考虑外界因素

同时考虑风和海底摩擦的影响, 表 1 和表 2 中给出了应用 PCM 方法计算波浪浅水变形的具体过程。其中表 1 是图 3 中两条波向线的绘制过程, 并整理和列出了从图 3 中提取的波向线间距和波浪传播距离等信息; 表 2 是波浪浅水变形的计算过程和结果, 其中浅水变形前的波长 L_1 按椭圆余弦波理论由图 4^[8] 查得。

表 1 基于椭圆余弦波实用算法 (PCM) 的波浪折射图绘制 (考虑风和海底摩擦的影响)										
折射点	折射前后	水深 d/m	无因次化波浪周期 $T\text{ (g/d)}^{1/2}$	波高 H/m	波高水深比 H/d	查图 1 得波速 $c/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	从图 3 得 1 [#] 波向线入射角 $\beta_{i-1}/(^{\circ})$	由式(1)计算 1 [#] 波向线出射角 $\beta_i/(^{\circ})$	1 [#] 波向线偏转角 $\Delta\beta/(^{\circ})$	查图 3 得 2 [#] 波向线入射角 $\gamma_{i-1}/(^{\circ})$
1	折射前	12.0	8.133	3	0.250	9.456	20.89			23.08
	折射后	10.5	8.695	3/2.793	0.286/0.266	9.206/9.170		20.31/20.23	0.58/0.66	
2	折射前	10.5	8.695	2.793	0.266	9.170	16.59			20.68
	折射后	9.0	9.391	2.793/2.565	0.310/0.285	8.814/8.765		15.92/15.83	0.67/0.76	
3	折射前	9.0	9.391	2.565	0.285	8.765	10.48			15.72
	折射后	7.5	10.288	2.565/2.393	0.342/0.319	8.324/8.275		9.95/9.89	0.53/0.59	
4	折射前	7.5	10.288	2.393	0.319	8.275	5.34			10.03
	折射后	6.0	11.502	2.393/2.222	0.399/0.370	7.767/7.701		5.01/4.97	0.33/0.37	
5	折射前	6.0	11.502	2.222	0.370	7.701	2.12			6.50
	折射后	5.0	12.600	2.222/1.889	0.444/0.378	7.326/7.172		2.02/1.97	0.10/0.15	
折射点	折射前后	由式(1)计算 2 [#] 波向线出射角 $\gamma_i/(^{\circ})$	2 [#] 波向线偏转角 $\Delta\gamma/(^{\circ})$	1 [#] 与 2 [#] 波向线中轴线偏转角 $\Delta\alpha/(^{\circ})$	沿 1 [#] 及 2 [#] 波向线中轴线的传播距离 $\Delta S_i/\text{m}$	中轴线与风向的夹角 $\theta/(^{\circ})$	1 [#] 与 2 [#] 波向线间距 b/m	间距比 b_{i-1}/b_i	折射系数 K_r	波向 α_2 (北偏东 $^{\circ}$)
1	折射前						1 000.00			22.5
	折射后	22.44/22.34	0.64/0.74	0.61/0.70	3 722.35/ 3 720.78	0.61/0.68	1 006.28/ 1 007.43	0.993 8/ 0.992 6	0.996 9/ 0.996 6	21.89/ 21.82
2	折射前						1 007.43			21.82
	折射后	19.84/19.73	0.84/0.95	0.76/0.86	2 769.90/ 2 769.19	1.19/1.49	1 022.57/ 1 023.55	0.985 2/ 0.984 3	0.992 6/ 0.992 1	21.31/ 21.01
3	折射前						1 023.55			21.01
	折射后	14.91/14.82	0.81/0.90	0.67/0.75	2 086.56/ 2 086.40	2.15/2.18	1 040.96/ 1 041.45	0.983 3/ 0.982 8	0.991 6/ 0.991 4	20.35/ 20.32
4	折射前						1 041.45			20.32
	折射后	9.41/9.33	0.62/0.70	0.48/0.54	2 018.07/ 2 017.95	2.62/2.66	1 067.85/ 1 068.48	0.975 3/ 0.974 7	0.987 6/ 0.987 3	19.88/ 19.84
5	折射前						1 068.48			19.84
	折射后	6.18/6.05	0.32/0.45	0.21/0.30	1 841.36/ 1 853.72	2.85/2.94	1 098.73/ 1 099.99	0.972 5/ 0.971 4	0.986 1/ 0.985 6	19.65/ 19.56

注: $\Delta\beta = \beta_{i-1} - \beta_i$; $\Delta\gamma = \gamma_{i-1} - \gamma_i$; $\Delta\alpha = (\Delta\beta + \Delta\gamma)/2$; $K_r = (b_{i-1}/b_i)^{1/2}$ 。表中被/线分成左右两部分的单元格中, 左半部数据是基于波浪折射前波高不改变 ($H_{i-1} = H_i$) 假设的计算结果, 右半部数据是波浪要素经表 2 调整后代入表 1 后第 2 次计算的结果。

表 2 基于椭圆余弦波实用算法 (PCM) 的波浪浅水变形计算 (考虑风和海底摩擦的影响)

计算 过程	浅水变形前 波高水深比 $p = H_1/d_1$	水深比 $r = d_2/d_1$	无因次化波 周期 $q =$ $[T(g/d_1)^{1/2}]/8$	由式(6)* ^[2] 计算波高浅水系数 的周期修正系数 K_{ST}	由式(7)* ^[2] 计算波长浅水系数 的周期修正系数 K_{LT}	查图 5* ^[2] 左图得波高浅 水系数 K_S	查图 5* ^[2] 右图得波长浅 水系数 K_L
1~2 段	3.0/12.0 = 0.250	10.5/12.0 = 0.875	$9 \times (9.8/12.0)^{1/2} /$ 8 = 1.017	1.001 0	0.998 9	1.021	0.976
2~3 段	2.793/10.5 = 0.266	9.0/10.5 = 0.857	$9 \times (9.8/10.5)^{1/2} /$ 8 = 1.087	1.005 6	0.994 4	1.016	0.965
3~4 段	2.565/9.0 = 0.285	7.5/9.0 = 0.833	$9 \times (9.8/9.0)^{1/2} /$ 8 = 1.174	1.012 3	0.988 9	1.031	0.956
4~5 段	2.393/7.5 = 0.319	6.0/7.5 = 0.800	$9 \times (9.8/7.5)^{1/2} /$ 8 = 1.286	1.022 2	0.981 6	1.054	0.949
5~6 段	2.222/6.0 = 0.370	5.0/6.0 = 0.833	$9 \times (9.8/6.0)^{1/2} /$ 8 = 1.438	1.024 1	0.979 5	1.043	0.962

计算 过程	沿波浪传播 方向的风速分量 $U' = U \cos \theta / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	无因次化风速 $t = U' / (gd_1)^{1/2}$	无因次化 传播距离 $s =$ $(\sum \Delta S / d_1) / 100$	摩擦 系数 f	由式(14) ^[2] 计算波 高风力修正系数的 周期修正系数 δ_{wHT}	查图 6 ^[2] 得波高风力 修正系数 δ_{wH}	由式(15) ^[2] 计算 波高底摩擦修正 系数 δ_{fH}
1~2 段	$20 \times \cos(0.61) =$ 19.999	19.999/ $(9.8 \times 12.0)^{1/2} = 1.844$	3 722.35/12.0/ 100 = 3.102	0.010	0.997 9	1.038	0.883
2~3 段	$20 \times \cos(1.19) =$ 19.996	19.996/ $(9.8 \times 10.5)^{1/2} = 1.971$	2 769.90/10.5/ 100 = 2.638	0.010	0.990 4	1.020	0.892
3~4 段	$20 \times \cos(2.15) =$ 19.986	19.986/ $(9.8 \times 9.0)^{1/2} = 2.128$	2 086.56/9.0/ 100 = 2.318	0.010	0.982 7	1.017	0.896
4~5 段	$20 \times \cos(2.62) =$ 19.979	19.979/ $(9.8 \times 7.5)^{1/2} = 2.330$	2 018.07/7.5/ 100 = 2.691	0.010	0.963 3	1.021	0.873
5~6 段	$20 \times \cos(2.86) =$ 19.962	19.962/ $(9.8 \times 6.0)^{1/2} = 2.605$	1 841.36/6.0/ 100 = 3.069	0.015	0.929 5	1.041	0.796

计算 过程	由式(16) ^[1] 计算波长底 摩擦修正系数 δ_{fL}	由式(17) ^[1] 计算波高 联合修正系数 δ_{wH}	波长联合修正系数 $\delta_{wL} \approx d_{fL}$	浅水变形后波高 $H_2 = H_1 K_S K_r \delta_{wH} / \text{m}$	浅水变形后波长 $L_2 = L_1 K_L \delta_{wL} / \text{m}$
1~2 段	0.986	0.915	0.986	$3 \times 1.021 \times 0.996 9 \times$ $0.915 = 2.793$	$85.107 \times 0.976 \times 0.986 =$ 81.902
2~3 段	0.985	0.911	0.985	$2.793 \times 1.016 \times 0.992 6 \times$ $0.911 = 2.565$	$81.902 \times 0.965 \times 0.985 =$ 77.850
3~4 段	0.984	0.913	0.984	$2.565 \times 1.031 \times 0.991 6 \times$ $0.913 = 2.393$	$77.850 \times 0.956 \times 0.984 =$ 73.234
4~5 段	0.978	0.892	0.978	$2.393 \times 1.054 \times 0.987 6 \times$ $0.892 = 2.222$	$73.234 \times 0.949 \times 0.978 =$ 67.970
5~6 段	0.965	0.827	0.965	$2.222 \times 1.043 \times 0.986 1 \times$ $0.827 = 1.889$	$67.970 \times 0.962 \times 0.965 =$ 63.099

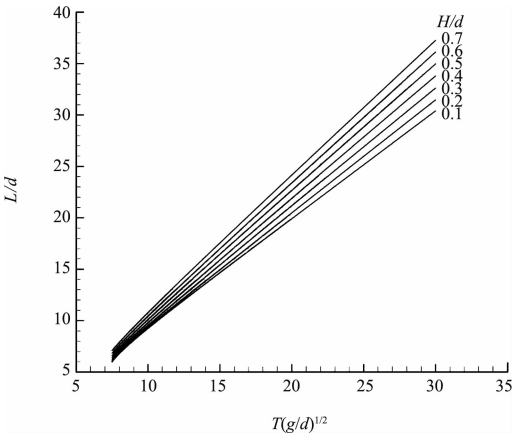


图 4 椭圆余弦波波长与波要素的关系曲线

从表 1 和表 2 中可以看到, 浅水变形后的波高、波长和波向分别为 1.89 m、63.10 m 和 19.56°。采用相同的方法, 这里直接给出仅考虑风的影响的工程所在地浅水波高和波长分别为 4.07 m 和 73.46 m, 仅考虑海底摩擦影响的浅水波高和波长分别为 1.60 m 和 62.89 m。由于本算例中波向线入射角 $\alpha_1 = 20.9^\circ (< 45^\circ)$ 且入射波高 $H_1/d_1 = 0.25 (< 0.5)$, 因此外界因素对椭圆余弦波折射图的影响不显著, 仅考虑风或海底摩擦影响时的工程所在地波向均为 19.56°。

2.1.2 忽略外界因素

不考虑外界因素影响时, 可通过直接建立传播起始点和终止点间的波能流守恒来计算波浪浅水变形。首先, 计算浅水变形前后的水深比 $r = d_2/d_1 = 0.417$ 、相对波高 $p = H_1/d_1 = 0.25$ 和无因次化波周期 $q = [T(g/d)^{1/2}]/8 = 1.017$ 。由文献[2]中的式(6)和式(7)分别计算波高、波长浅水系数的周期修正系数 $K_{ST1-2} = 1.003\ 3$ 、 $K_{LT1-2} = 0.995\ 9$, 再由文献[2]中的图 5 分别查得波高和波长浅水系数 $K_{S1-2} = 1.263$ 和 $K_{L1-2} = 0.859$ 。由于本例中外界因素对椭圆余弦波折射图的影响可以忽略, 因此波浪折射系数可由表 1 中的波向线信息得到, 即 $K_{r1-2} = (b_1/b_2)^{1/2} = 0.947$ 。则工程所在地的浅水波高和波长分别为: $H_2 = H_1 K_{S1-2} K_{r1-2} = 3.59\text{ m}$, $L_2 = L_1 K_{L1-2} = 73.11\text{ m}$ 。

比较采用 PCM 方法计算的不同外界条件下的浅水波要素, 可以看到, 当考虑风的影响时工程所在地波高增大 13.4%, 而当考虑海底摩擦的影响时浅水波高减小 55.4%。另外, 风对波长的影响较小可以忽略, 而海底摩擦的影响使得浅水波长减小 14.0%。因此, 浅水变形过程中不宜忽略外界因素的影响。

2.2 DHI-MIKE21

本节采用丹麦水力研究所 (DHI Water & Environment) 开发的 MIKE 系列商业软件中的 BW (Boussinesq Wave) 和 NSW (Nearshore Spectral

Wind-Wave) 模块, 来模拟图 5 所示地形上的波浪场。其中 BW 模型的控制方程是 Madsen 等提出的改进型 Boussinesq 方程^[9], 该模型可以考虑波浪浅水变形、折射、绕射、反射、波浪破碎和海底摩擦等多种因素, 是 MIKE 软件中精度最高且应用最广的模块, 但不能计算风对波浪的作用; NSW 模型的控制方程是 Holthuijsen 等提出的基于能量守恒原理的能量平衡方程^[10], 该模型可以考虑波浪浅水变形、折射、风和海底摩擦等多种因素。

图 5 为建立的数值计算域, 波浪垂直于模型的左边界入射。图 6 给出采用 DHI-MIKE21 计算得到的波高分布。提取工程所在地的波要素, 与采用 PCM 方法得到的结果一并列于表 3。

从表 3 可以看到, 当取 $f = 0.01/0.015$ 时, 采用 PCM 方法 (考虑风和海底摩擦影响) 计算得到的浅水波高比采用 MIKE21-NSW 模型的计算结果大 12.7%, 浅水波长计算差别在 5% 以内。采用 PCM 方法 (仅考虑海底摩擦影响) 计算得到的浅水波高和波长与采用 MIKE21-BW 模型的计算结果基本一致。由于《规范》中的浅水变形方法忽略了波浪非线性和外界因素的影响, 与 PCM 方法计算得到的浅水波要素差别较大。另外, 表 3 还给出 $f = 0.02/0.05$ 时的相应计算结果。与 $f = 0.01/0.015$ 的计算结果相比, 浅水波高有大幅度的减小, 说明了在波浪浅水变形计算过程中海底摩擦系数取值的重要性。

表 3 采用不同计算方法得到的浅水波要素的比较									
计算方法	外界因素			浅水变形前			浅水变形后		
	风速 $U/(m \cdot s^{-1})$	海底摩擦 f	总况	H_1/m	L_1/m	$\alpha_1/(^{\circ})$	H_2/m	L_2/m	$\alpha_2/(^{\circ})$
《规范》			理想情况		87.90		3.19	60.41	18.22
			理想情况				3.59	73.11	19.56
			风				4.07	73.46	
			海底摩擦				1.60	62.89	
			风和海底摩擦				1.89	63.10	19.00
			海底摩擦				0.88	58.19	
			风和海底摩擦				0.99	60.25	
			海底摩擦				1.49		18.53
MIKE21-BW	20	0.01/0.015	海底摩擦	3.0	85.11	22.5	1.65	60.41	18.25
MIKE21-NSW		0.01/0.015	风和海底摩擦				0.90		18.23
MIKE21-BW		0.02/0.05	海底摩擦				0.87		17.86
MIKE21-NSW		0.02/0.05	风和海底摩擦						

注: MIKE21-BW 和 NSW 模型不能直接用于波长的计算, 表中浅水变形前后的波长由线性波浪色散关系得到。

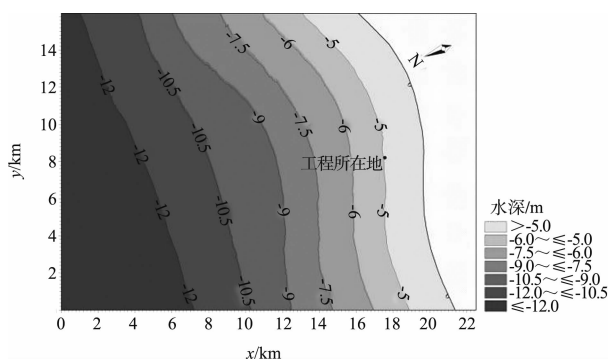
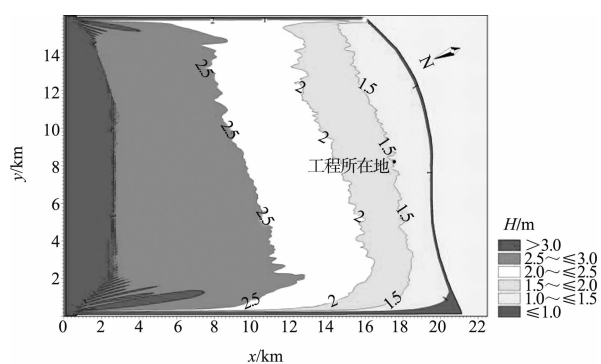
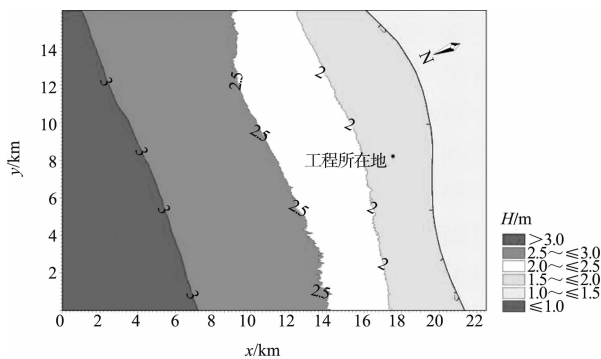


图5 DHI-MIKE21 的数值计算域



a) BW模型



b) NSW模型

图6 DHI-MIKE21 计算的工程海域波高分布

3 结论

在文献[2]沿直线传播的椭圆余弦波浅水变形实用算法(PCM)基础上,提出考虑波浪折射时的浅水变形计算方法。通过分析一个具体算例的计算结果,得到了以下结论:

1) 在水深较浅的近岸海域,适宜基于椭圆余弦波理论计算波浪的浅水变形,建议对《规范》予以补充,其适用范围与《规范》一致。

2) 本文算例的计算结果表明,波浪浅水变形计算中不宜忽略外界因素的影响(如风和海底摩擦)。

3) 本文提出的 PCM 方法便于工程应用,计算结果较为准确,适合于工程初期规划设计时应用。

4) 波浪浅水变形过程中,海底摩擦影响十分显著,根据海床底质,应谨慎选择底摩擦系数 f 。

参考文献:

- [1] JTJ 145—2013 海港水文规范[S].
- [2] 贺铭,邱大洪.椭圆余弦波浅水变形实用算法(I)——对《海港水文规范》的一个补充[J].水运工程,2015(1): 1-7.
- [3] Coastal Engineering Manual [S]. Washington, D C: U S Army Corps of Engineer Coast and Hydraul Lab, 2002.
- [4] Ebersole B A, Cialone M A, Parter M D. PCPWAVE-A Linear waver propagation model for engineering use[R]. Vicksburg: U S Army Engineer Waterways Experiment Station, 1986.
- [5] Kirby J T, Dalrymple R A, Shi F Y. Combined refraction/diffraction model REF/DIF 1, Version 3.0, Documentation and users manual[R]. Delaware: University of Delaware, 2002.
- [6] Resio D T. STWAVE: Wave propagation simulation theory, testing and application[R]. Florida: Department of Oceanography, Ocean Engineering, and Environmental Science, Florida Institute of Technology, 1993.
- [7] Wiegel R L. A presentation of cnoidal wave theory for practical application [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1960, 7(2): 273-286.
- [8] 邱大洪.椭圆余弦波在工程上的应用[J].大连理工大学学报, 1982, 21(1): 87-96.
- [9] Madsen P A, Sørensen O R. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics: Part 2. A slowly-varying bathymetry[J]. Coastal Engineering, 1992, 18(3): 183-204.
- [10] Holthuijsen L H, Booij N, Herbers T H C. A prediction model for stationary, short-crested waves in shallow water with ambient currents [J]. Coastal Engineering, 1989, 13(1): 23-54.

(本文编辑 武亚庆)