

基于 Hermite 插值法的 $GM(1,1)$ 模型 在软基地表沉降预测中的应用

文辉辉, 杨 鹏

(中交四航工程研究院有限公司, 广东 广州 510230)

摘要: 地表沉降量作为判定地基卸载时间的直接技术指标, 其计算的准确性已成为各类工程技术人员面临的难题之一。为研究某软基施工过程中加固效果的动态变化情况, 采用 Hermite 插值法将现场地表沉降实测数据转化为等时间间隔, 并基于转化结果建立了 $GM(1,1)$ 模型和对应的时间响应函数, 以预测不同时间下的地表沉降量。分析计算结果表明: $GM(1,1)$ 模型的计算精度等级为 1 级, 对不同时间下的地表沉降量能进行较好的预测; 同时, 为今后解决类似复杂沉降预测问题提供了借鉴和指导。

关键词: Hermite 插值法; $GM(1,1)$ 模型; 非等时间间隔; 沉降量

中图分类号: TU 433 文献标志码: A 文章编号: 1002-4972(2015)03-0047-04

Application of $GM(1,1)$ model based on Hermite interpolation method in prediction of soft foundation surface subsidence

WEN Hui-hui, YANG Peng

(CCCC Fourth Harbor Engineering Institute Co., Ltd., Guangzhou 510230, China)

Abstract: The surface subsidence is a direct index indicating in unloading time, and the calculation accuracy has become one of the difficulties faced by all kinds of engineers. To study the dynamic change of reinforcement effect with a soft foundation construction process, the measured data of surface subsidence has been converted to the same interval by hermite interpolation in this paper. Base on the conversion results, $GM(1,1)$ model and the corresponding function with time has been established to predict the surface settlement in different time. The results of analysis showed that the calculation accuracy by the $GM(1,1)$ prediction model is the first level, which could well predict the surface subsidence in different time, meanwhile, it would provide reference and guidance for solving the related complex settlement prediction problems in the future.

Keywords: Hermite interpolation; $GM(1,1)$ model; uniform interval; settlement

沉降监测作为软基信息化施工的重要组成部分, 其通过对现场沉降标的连续性监测, 可准确获取岩土体的变形动态变化情况, 从而为岩土工程设计、施工等提供各类参考依据。但由于受施工工艺和偶然误差等因素影响, 现场实测数据往往具有一定的离散性, 测试数据随时间变化的散点图波动性较大, 准确预测软土沉降量成为各类

工程技术人员面临的难题之一^[1-2]。采用回归分析对软土体地表沉降实测数据进行分析与处理, 可获得其在施工过程中的时态变化函数关系式, 从而为不同时间下的沉降量预测和固结度分析提供依据, 但基于不同函数模型下的回归分析精度并不相同, 不能同时对短期和最终沉降量进行准确预测。

灰色系统理论因其完备的理论性、良好的操作性、要求数据量少等显著优点,已被广泛应用于软基沉降预测领域。为提高预测精度,灰色系统理论要求地表沉降实测数据具有等时间间隔的特点,但在现场实测过程中,由于受观测条件、天气变化等因素的限制,很难做到上述要求,因此,需对原始地表沉降实测数据进行插值处理。本文以某软基施工过程中的地表沉降实测数据为依托,采用 Hermite 插值法将其向等时间间隔进行转化,并基于转化结果建立 $GM(1,1)$ 模型,对不同时间下的地表沉降量进行预测,为今后解决类似复杂沉降预测问题提供了借鉴和指导。

1 $GM(1,1)$ 模型建立

灰色系统理论是我国著名学者邓聚龙教授于 1982 年提出的,属于黑箱概念的一种推广和应用,既含有已知信息,同时又含有未知的或不确定的信息系统。它通过已知的白化参数,将灰色问题进行淡化和白化,从而在误差精度允许范围内,达到信息的已知化^[3]。 $GM(1,1)$ 模型作为目前最常用的预测因子模型之一,克服了变量之间的相互影响,只需将其与不同的数据生成处理相结合,即可达到不同的预测目的。

为研究软基施工过程中加固效果的动态变化情况,应先以现场实测沉降数据为依托,建立其对应的微分方程模型,进而对系统的整体功能、协调功能以及系统各因素之间的关联关系、因果关系、动态关系进行具体的量化研究。 $GM(1,1)$ 模型的建立需经过灰色生成、模型建立、精度评定等过程。

1.1 灰色生成

将等时间间隔沉降序列 $\mathbf{x}^{(0)}$ 中的数据按照某种要求进行处理,称为生成^[4]。由于初步获得的原始数据随机性较大、规律性不强,又 $GM(1,1)$ 模型的预测效果对原始数据的依赖性较大,其要求时间序列近似服从指数规律变化或者说要求数据总体上呈单调较平缓变化,而不是周期性或无序性变化。因此,为了提高模

型预测精度,必须对原始数据的随机性进行弱化处理。设时间序列 t 下对应的地表沉降实测数据为:

$$\mathbf{X}_{(k)}^{(0)} = \{X_{(t)}^{(0)} | t=1, 2, \dots, n\} = \{X_{(1)}^{(0)}, X_{(2)}^{(0)}, \dots, X_{(n)}^{(0)}\} \quad (1)$$

采用二阶弱化算子法对数据(1)弱化后进行数据累加的弱化算法生成新数列,将其向有明显规律的时间序列进行转化。

在原始序列 $\mathbf{X}_{(k)}^{(0)} = \{X_{(1)}^{(0)}, X_{(2)}^{(0)}, \dots, X_{(n)}^{(0)}\}$ 中引入二阶弱化算子 D^2 , 令

$$\mathbf{X}_{(k)}^{(0)} D = \{X_{(1)}^{(0)} d, X_{(2)}^{(0)} d, \dots, X_{(n)}^{(0)} d\} \quad (2)$$

其中:

$$\mathbf{X}_{(k)}^{(0)} d = \frac{1}{n-k+1} [X_{(k)}^{(0)} + X_{(k+1)}^{(0)} + \dots + X_{(n)}^{(0)}] \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

由式(3)可得:

$$\mathbf{X}_{(k)}^{(0)} D^2 = \{X_{(1)}^{(0)} d^2, X_{(2)}^{(0)} d^2, \dots, X_{(n)}^{(0)} d^2\} \quad (4)$$

由式(4)可得:

$$X_{(k)}^{(0)} d^2 = \frac{1}{n-k+1} [X_{(k)}^{(0)} d + X_{(k+1)}^{(0)} d + \dots + X_{(n)}^{(0)} d] \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

以上经二阶弱化算子得到的 $\mathbf{X}_{(k)}^{(0)} D^2$ 再经依次累加生成即得到 $\mathbf{X}_{(k)}^{(1)}$ 。

1.2 模型建立

由灰色生成序列 $\mathbf{X}_{(k)}^{(1)}$ 进一步结合 $GM(1,1)$ 模型相应的白化微分方程建立预测模型。其对应的白化微分方程如下:

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} + aX^{(1)} = u \quad (6)$$

式中: a 、 u 为对应的白化参数。

由最小二乘法原理可知,使得白化参数最优所需满足的条件为:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a} \quad \mathbf{u}]^T = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Y} \quad (7)$$

$$\text{式中: } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} X_{(2)}^{(0)} \\ X_{(3)}^{(0)} \\ \vdots \\ X_{(n)}^{(0)} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(X_{(1)}^{(1)} + X_{(2)}^{(1)}) & 1 \\ -\frac{1}{2}(X_{(2)}^{(1)} + X_{(3)}^{(1)}) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(X_{(n-1)}^{(1)} + X_{(n)}^{(1)}) & 1 \end{bmatrix}。$$

将求得的参数值重新代入原白化微分方差即可得出预测模型方程, 基本形式为:

$$\hat{X}_{(t+1)}^{(1)} = (X_{(1)}^{(1)} - \frac{u}{a})e^{-at} + \frac{u}{a} \quad (t=1,2,\cdots,n) \quad (8)$$

以上得出的预测模型计算结果为预测累加值, 进一步累减后方可得到还原值:

$$\hat{X}_{(t+1)}^{(0)} = \hat{X}_{(t+1)}^{(1)} - \hat{X}_{(t)}^{(1)} \quad (9)$$

其中: $\hat{X}_{(1)}^{(0)} = \hat{X}_{(1)}^{(1)}$ 。

1.3 误差检验

灰色系统预测就是通过对原始数据的处理建立灰色系统模型, 从而发现和掌握系统的发展变化规律, 对系统的未来状态做出科学合理的定量预测, 但对于预测模型是否合乎要求, 能否作为定性分析的依据, 必须经过多方面的检验和判断^[5]。常用的灰色系统预测模型检验方法有残差大小检验和后验差检验。

设原始值序列 $X_{(k)}^{(0)}$ 对应的残差序列为 $\varepsilon_{(k)}^{(0)}$, 分别计算原始序列 $X_{(k)}^{(0)}$ 及残差序列 $\varepsilon_{(k)}^{(0)}$ 的均值和方差。

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{(k)}^{(0)} \quad (10)$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_{(k)}^{(0)} - \bar{X})^2 \quad (11)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_{(k)}^{(0)} \quad (12)$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\varepsilon_{(k)}^{(0)} - \bar{\varepsilon})^2 \quad (13)$$

- 1) 若取 $C = S_2/S_1$ 为均方差比值, 对于给定的 $C_0 > 0$, 当 $C < C_0$ 时, 所得模型为均方差合格模型。
- 2) 若小误差概率 $P = P\{|\varepsilon_{(k)}^{(0)} - \bar{\varepsilon}| < 0.675S_1\}$, 对于给定的 $P_0 > 0$, 当 $P > P_0$ 时, 所得模型为小误差概率合格模型。
- 3) 对于给定的 $\varepsilon_0 > 0$, 当绝对关联度 $\varepsilon > \varepsilon_0$ 时, 所得模型称为关联度合格模型。

常用的模型精度等级见表 1。

表 1 精度检验等级

精度等级	关联度 ε	均方差比值 C_0	小误差概率 P_0
1 级	0.90	0.35	0.95
2 级	0.80	0.50	0.08
3 级	0.70	0.65	0.70
4 级	0.60	0.80	0.60

2 量测数据的转化与求解

现场地表沉降实测数据曲线并不具有等时间间隔的特点, 需采用插值法将其进行转化, 以便于数值方法求解。Hermite 插值法属于目前常见的代数插值法之一^[5], 其认为: 在插值点附近对于给定的 m 个不等距时刻($t_1 < t_2 < \cdots < t_n$), 与其对应的地表沉降实测值分别为 $S(t_1), S(t_2), \cdots, S(t_n)$, 可寻求一个多项式 $S = F(t_i)$ 以逼近实测曲线 $S(t_i)$ 。

在 $S(t_i)$ 的 Hermite 插值中, 取插值节点数为 n 个, 分别为 $(t_1, S(t_1)), (t_2, S(t_2)), \cdots, (t_n, S(t_n))$, 则对应的 Hermite 插值多项式 $S = F(t_i)$ 应满足

$$F(t_i) = S(t_i) \quad (14)$$

$$F'(t_i) = S'(t_i) \quad (15)$$

3 工程应用

将以上理论应用于湛江港霞山港区散货码头工程水工码头和软基处理工程地表沉降实测数据的处理。该项目位于广东省湛江市霞山港区, 周边场地均有待处理, 其南接宝满工业园区, 北侧毗邻中油湛江燃料油库和 209[#]成品码头, 因此, 该项目的成功实施, 可为周边工程的设计和后续施工提供参考依据。

为了提高预测精度, 本文选取典型沉降标在稳载下的沉降实测数据进行分析, 且不采用初始时刻的几个实测数据, 具体数据见表 2。

由表 2 可知, 该沉降标处地表沉降总体表现为稳定发展, 且没有明显的“台阶”现象, 真空预压引起的地表沉降量约为 742 mm; 沉降实测数据具有非等时间间隔的特征, 无法直接满足 $GM(1,1)$ 模型的求解要求, 需通过插值法将其向等时间间隔数据进行转换。

表 2 实测沉降数据

监测时间/d	实测沉降量/mm	监测时间/d	实测沉降量/mm
50	579	82	726
54	610	86	733
58	637	90	737
62	661	94	740
66	682	101	742
70	700	108	742
74	712	115	742
78	721	120	742

取监测时间间隔 Δt 为 5 d，选用 Hermite 插值法将地表沉降实测数据进行转化，得到插值曲线和原始地表沉降实测数据曲线（图 1）。

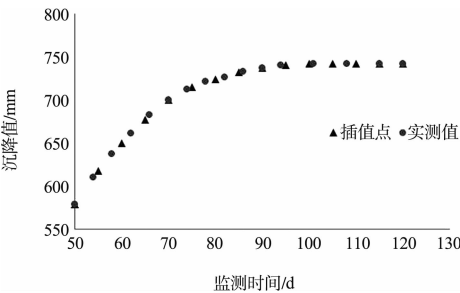


图 1 沉降随时间变化关系

由图 1 可知，依据插值结果所作的数据点与原始地表沉降实测数据点吻合较好，选用 Hermite 插值法是可行与合理的。

对插值结果采用二阶弱化算子修正与累加生成相结合进行初步弱化，最终得到累加序列值 $X_{(k)}^{(1)}$ 。具体计算结果见表 3。

表 3 二阶弱化后累加生成序列

监测时间/d	原始序列 $X_{(k)}^{(0)}$	二阶弱化 $X^{(0)}D^2$	累加生成 $X_{(k)}^{(1)}$
50	439.0	725.231	725.231
55	504.7	729.182	1 454.413
60	562.9	732.472	2 186.885
65	609.5	735.145	2 922.030
70	652.0	737.263	3 659.293
75	681.2	738.874	4 398.167
80	702.9	740.074	5 138.241
85	719.3	740.924	5 879.165
90	731.0	741.473	6 620.638
95	737.8	741.783	7 362.421
100	740.7	741.930	8 104.351
105	741.8	741.988	8 846.339
110	742.0	742.000	9 588.339
115	742.0	742.000	10 330.339
120	742.0	742.000	11 072.339

求解 $GM(1,1)$ 模型下对应的地表沉降预测结果（表 4），同时，计算其对应的残差和残差百分比。

表 4 预测精度

时间/d	原值	预测	残差	残差百分比/%
50	725.231	725.231	0.000	0.0
55	729.182	733.521	-4.339	0.6
60	732.472	734.327	-1.855	0.3
65	735.145	735.136	0.009	0.0
70	737.263	735.945	1.318	0.2
75	738.874	736.755	2.119	0.3
80	740.074	737.566	2.508	0.3
85	740.924	738.378	2.546	0.3
90	741.473	739.190	2.283	0.3
95	741.783	740.004	1.779	0.2
100	741.930	740.818	1.112	0.1
105	741.988	741.634	0.354	0.0
110	742.000	742.450	-0.450	0.1
115	742.000	743.267	-1.267	0.2
120	742.000	744.085	-2.085	0.3

分别采用残差大小检验和后验差检验对预测模型进行精度评定，可知： $\varepsilon = 1.000$ ， $C = 0.141$ ， $P = 1.000$ ，模型精度为 1 级，因此可将其应用于具体预测实践中。

对应的白化参数值以及灰色模型如下：

$$A = [a \quad u]^T = [-0.001 \quad 732.319] \tag{16}$$

$$\hat{X}_{(t+1)}^{(1)} = (X_{(1)}^{(1)} - \frac{u}{a})e^{-at} + \frac{u}{a} = 666\,470.049e^{0.001t} - 665\,744.818 \tag{17}$$

运用二阶弱化算子修正累加生成的灰色预测模型，预测在之后 130、140、150 d 的软基地表沉降量分别为 844、853、863 mm。

4 结论

1) Hermite 插值法将非等时间间隔下的实测沉降数据进行转换，为实现岩土工程的信息化工创造了必要条件。

2) $GM(1,1)$ 模型的精度等级为 1 级，能较好地拟合地表沉降实测值，可用于对不同时间下的地表沉降能进行预测。