基于牛顿迭代法的潮汐模型高低潮时计算方法*

王如云[1]，周　鹏[1]，周　钧[2]，刘　鹏[3]
(1. 河海大学 港口海岸与近海工程学院，江苏 南京，210098；
2. 河海大学 水文水资源学院，江苏 南京，210098；
3. 中交第三航务工程局有限公司 江苏分公司，江苏 连云港，222042)

摘要： 在由调和分析方法建立了潮汐潮位预报模型后，利用牛顿迭代法给出了一种快速求解潮汐潮位预报模型的高低潮时方法。利用连云港的潮汐潮位预报模型，分别通过不同的求解高低潮时的方法，对潮汐高低潮时进行了预报。计算结果表明，在满足同等精度条件下，求解高低潮时的牛顿迭代法具有计算量小、收敛速度快等优势。

关键词： 牛顿迭代法；高低潮时；预报；潮汐；调和分析

中图分类号： P 731.23　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1002–4972(2013)02–0027–04

Computational method for predicting the time of high and low water based on Newton iteration method

WANG Ru-yun[1], ZHOU Peng[1], ZHOU Jun[2], LIU Peng[3]
(1. College of Harbor, Coastal and Offshore Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;
2. College of Hydrology and Water Resources, Hohai University, Nanjing 210098, China;
3. Jiangsu Branch of China Communications Construction Co., Ltd., Shanghai Port Engineering Co., Ltd., Lianyungang 222042, China)

Abstract: After the tide level predicting model is built with the harmonic analysis method, a method for fast solving the time of high and low water of the tide level predicting model is supplied with Newton iteration method. The time of high and low water is predicted with several different methods. The results show that Newton iteration method has several advantages, such as less calculation, faster converged speed, etc.

Key words: Newton iteration method; time of high and low water; predict; tide; harmonic analysis

不少港口和航道不能够满足某些大型船舶全天候进港和通航的要求，对于这些港口和航道，采取乘一定的较大潮位进港和通过航道浅段，亦即乘潮进港或乘潮通航是必要的。另外，在近岸水深较浅的地方施工往往也需要乘潮作业。而这些工作的调度安排，需要掌握未来的高低潮时变化规律。除此之外，天文潮的高低潮时的准确预报，对风暴潮可能造成灾害的预报存在很大影响。因此，对天文潮高低潮时的准确预报具有重要的实际应用价值。

在已经由调和分析方法求出调和常数的前提下，求解高低潮时的近似算法目前主要有“二分法”、“优选法”、“插值法”和“二分–插值法”等[1-3]。用这些算法求解高低潮时时，首先都要选出连续的3个呈非单调变化的正点潮位置（因为在这样的正点潮位置对应的时间区间内一定存在局部的极值潮位，而这种极值潮位对应的时间就是所要求的高低潮时），然后进一步采取不同的算法进行求解。

二分法是在选出上述3个正点潮位置及其所夹的两个区间的基础上，算出这两个区间各自中点的潮高。这2个潮高与原来的3个潮高一起，共计

收稿日期： 2012–07–04
***基金项目：** 江苏省水利科技重点项目(2010500312),自然科学基金(40906048)
作者简介： 王如云(1963—)，男，博士，教授，从事海洋科学的研究。

就有5个潮高，从中再找出呈非单调变化的3个相邻潮高位置及其所夹的两个区间，再算出这两个区间各自中点的潮高，如此反复做下去，一直到时间区间被压缩到某个误差限为止。二分法虽然简单，但缺点是收敛太慢，一般不用于求根[4]。

优选法（0.618法）和二分法有相似的求解过程，但每次迭代后的时间间隔缩小为上一次时间间隔的0.618倍，进而逐步求出高低潮时。二分法每次迭代都要计算2个潮位值，优选法除了第1次迭代要计算2次潮位值外，以后的每1次迭代都只需要算1个潮位值。由于潮位计算占迭代过程主要的计算量，所以优选法迭代2次的计算量才相当于二分法迭代1次的计算量。优选法经过2次迭代后剩余的区间长度就是原来区间长度的$(0.618\times0.618)0.382$倍，而二分法经过1次迭代后剩余的时间区间长度是原来区间长度的0.5倍。因此，优选法比二分法求解更快速。

插值法是在选出上述3个正点潮位置的基础上，由拉格朗日插值公式建立模拟潮位曲线，通过求时间一阶导数的零点来给出高低潮时的方法。模拟潮位的插值多项式通常采用1 h步长3点插值多项式、1 h步长5点插值多项式和0.5 h步长5点插值多项式等[3,5]。插值法存在着两种误差：1）由于插值法是借助插值多项式求解高低潮时的，因此所得结果含有插值引起的截断误差；2）在求插值多项式一阶导数零点时还存在近似误差。虽然求插值多项式一阶导数零点的近似误差可以通过迭代算法适当地减小，但是插值引起的截断误差却随插值点的确定而无法改善。

二分–插值法是综合上述二分法和插值法的一种求高低潮时的方法，其先用若干次二分法，最后一次用插值法给出最终近似值。二分–插值法存在以下问题：若先前的二分法进行的次数较少，可能使二分后的时间间隔过大，以致进行插值法后产生的截断误差不可忽略；若二分法进行足够多次，以保证进行最后一次插值法得到高低潮时的精度满足要求时，又会致使先前的计算量大大增加。

针对求解高低潮时的以上方法的不足之处，提出了求解高低潮时的牛顿迭代法。与上述方法相比，求解高低潮时的牛顿迭代法，具有满足同等精度条件下，计算量小、收敛速度快等优势。

1　牛顿迭代法[4]

设已知方程$f(x)=0$有近似根x_k，满足$f'(x_k)\neq 0$，牛顿迭代法如下：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\qquad k=0,1,\cdots \tag{1}$$

牛顿迭代法的优点是收敛快，其在根x^*的邻近具有平方收敛性质，缺点是每步迭代要计算$f(x_k)$及$f'(x_k)$，因此计算量较大，且有时$f'(x_k)$计算较困难；另外初始近似x_0一般只在根x^*附近才能保证格式计算的收敛性。为保证格式计算的收敛性，通常采用牛顿下山法，即构造如下迭代格式：

$$x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\qquad k=0,1,\cdots \tag{2}$$

其中$\lambda(0<\lambda\leqslant 1)$称为下山因子。$\lambda$的取值从$\lambda=1$开始，当满足

$$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)| \tag{3}$$

时，置$x_k=x_{k+1}$，$\lambda=1$，再进行下一步迭代，否则，将λ减半后重新计算式（2），直到式（3）成立。

2　应用牛顿迭代法求解高低潮时的计算方法

假设潮汐潮位模型为

$$h(t)=a_0+\sum_{j=1}^{m}\left[a_j\cos(\omega_j t)+b_j\sin(\omega_j t)\right] \tag{4}$$

式中：a_0为平均海平面高度；m为分潮个数；ω_j为第j个分潮的角速率；$\sqrt{a_j^2+b_j^2}$为第j个分潮的振幅。

目前，求解潮汐调和常数的方法通常采用最小二乘法，例如使得目标函数

$$E=\sum_{\tilde{t}_l=-N}^{N}\theta_1\left[H_l-h(\tilde{t}_l)\right]^2+\sum_{i=1}^{\tilde{N}}\left\{\theta_2[h_i-h(t_i)]^2+\theta_3[h'(t_i)]^2+\theta_4(t_i-\hat{t}_{pi})^2\right\} \tag{5}$$

达到极小值[2,6–8]。这里$0\leqslant\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\leqslant 1$为权重，且$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=1$；$N$是半个调和分析时段中正点潮数

据的数目；H_l是正点潮实测潮位；$h(\tilde{t}_l)$是潮汐潮位模型的正点潮潮位；$\tilde{t}_l$是正点潮实测时间；$\tilde{N}$是调和分析时段中高低潮潮位总个数；$h(t_i)$是潮汐潮位模型的高低潮潮位；h_i是高低潮实测潮位；t_i是高低潮实测时间；$\hat{t}_{pi}$是高低潮预报时间。

当调和常数a_j和b_j计算出来后，应用牛顿迭代法计算高低潮时，就是求潮位导数值

$$h'(t) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j[-a_j \sin(\omega_j t) + b_j \cos(\omega_j t)] \quad (6)$$

为零的时刻。在选出连续的3个呈非单调变化的正点潮位置$h(n-1)$, $h(n)$, $h(n+1)$后，取迭代初始值$t_0=n$开始迭代，此时牛顿下山法的迭代公式是

$$t_{k+1} = t_k - \lambda \frac{h'(t_k)}{h''(t_k)} \quad k=0, 1, \cdots \quad (7)$$

从$\lambda=1$开始，逐次将λ减半进行计算，直到能满足$|h'(t_{k+1})| < |h'(t_k)|$为止。

3　计算结果对比分析

利用连云港1982年的正点潮实测潮位、2005年的高低潮实测潮位以及潮位曲线在高低潮时的导数为零等数据和条件，首先由最小二乘法建立含128个分潮[9]的潮位调和分析预报模型，然后由不同的高低潮时计算方法，计算此潮汐潮位模型决定的2011年内的所有高低潮潮时数据，并与模型高低潮时精确结果（模型高低潮时的精确结果来自二分法，满足前后两次迭代结果的差的绝对值小于10^{-7} h，且在所求的高低潮时处模型导数的绝对值小于10^{-3}时，取到小数点后5位的近似值）进行比较。

3.1　潮汐潮位模型决定的高低潮时计算结果比较

由于$h'(t_k)$，$h''(t_k)$和$h(t_k)$的计算量主要是m个分潮计算时涉及到的正弦或余弦三角函数的计算，因此$h'(t_k)$，$h''(t_k)$和$h(t_k)$的计算量相当。二分法每进行1次要计算2个潮位值。优选法除第1次要计算2个潮位值外，以后每进行1次只要计算1个潮位值。牛顿迭代法每进行1次，要计算潮位的一阶导数值$h'(t_k)$和二阶导数值$h''(t_k)$各1次。由此可知，二分法和牛顿迭代法进行1次的计算量相当，等同于优选法进行2次的计算量。

针对利用不同的计算方法求解潮汐潮位模型的高低潮时时，设定的计算停止准则是：当前后两次迭代结果的差的绝对值小于10^{-3} h，且后一次迭代结果处的模型导数值的绝对值小于10^{-2}时，迭代过程停止。不同计算方法所得结果对比如表1所示。

表1　潮汐潮位模型的不同求解方法计算结果

求解方法	平均迭代次数	$h'(t_k)$，$h''(t_k)$和$h(t_k)$的平均计算次数	计算高低潮时与模型高低潮时的均方差/h	计算高低潮时与实测高低潮时的均方差/h
二分法	10.50	21.00	1.5×10^{-4}	9.203×10^{-2}
优选法(0.618法)	16.44	17.44	1.4×10^{-4}	9.204×10^{-2}
牛顿迭代法	2.84	5.69	2.4×10^{-6}	9.203×10^{-2}

由表 1 可见，在满足迭代要求的基础上，利用二分法求解每个高低潮时需要的平均迭代次数是10.52次，优选法是16.41次，而牛顿迭代法只需要2.84次。此时，不同求解方法计算结果与实测高低潮时的均方差几乎相同，可见这3个方法计算高低潮时都能够满足实际需要，然而牛顿迭代法收敛速度最快。

在满足迭代要求的情况下，二分法、优选法和牛顿迭代法的总计算量比值是21.00∶17.44∶5.69，由此可见牛顿迭代法有着明显的优势。

计算量与牛顿迭代法相近时二分法和优选法的计算结果如表2所示。

表2　计算量与牛顿迭代法相近时二分法和优选法的计算结果

求解方法	平均迭代次数	$h'(t_k)$，$h''(t_k)$和$h(t_k)$的平均计算次数	计算高低潮时与模型高低潮时的均方差/h	计算高低潮时与实测高低潮时的均方差/h
二分法	3.43	6.86	1.5×10^{-2}	9.332×10^{-2}
优选法(0.618法)	5.29	6.29	1.4×10^{-2}	9.300×10^{-2}

由表2可见，当二分法和优选法的计算量和表1中的牛顿迭代法相近时，其计算结果与模型高低潮时、实测高低潮时的均方差均大于牛顿迭代法的相应均方差。

综上所述，在同样求解精度的条件下，牛顿迭代法能够比二分法和优选法更快速地求解出高低潮时。

3.2 插值法与牛顿迭代法的比较

这里插值法分别采用1 h步长3点插值法、1 h步长5点插值法和二分–插值法3种，并对其结果进行比较。

1）1 h步长3点插值法[2]。

此法是采用选出的连续的3个呈非单调变化的正点潮位置作为插值点，得到二次拉格朗日插值曲线，然后给出插值曲线的极值点的方法。采用公式

$$t_m=t_1+0.5d(\eta_0-\eta_1)/(\eta_0-2\eta_1+\eta_2) \qquad (8)$$

给出高低潮时（d为时间间隔，此处为1 h）。其中$(t_0, \eta_0), (t_1, \eta_1), (t_2, \eta_2)$是连续的3个呈非单调变化的正点潮高位置，$t_m$是求解出的高低潮时。

2）1 h步长5点插值法[3]。

采用选出的连续的3个呈非单调变化的正点潮位置及其前后两个正点潮位置作为插值点，得到四次拉格朗日插值曲线，然后给出插值曲线的极值点的方法。

3）二分–插值法[2]。

采用先二分3次后，再采用5点插值法。之所以选择二分3次，是因为此时计算量已经超过了表1中采用的牛顿迭代法。不同插值法计算所得结果如表3所示。

表3 插值法计算结果

求解方法	计算高低潮时与模型高低潮时的均方差/h	计算高低潮时与实测高低潮时的均方差/h
1 h步长3点插值法	0.27	0.279 00
1 h步长5点插值法	3.3×10^{-2}	9.544×10^{-2}
二分3次后的5点插值法	1.8×10^{-3}	9.205×10^{-2}

由表3可见，1 h步长3点插值法结果与模型高低潮时的均方差是0.27 h，1 h步长5点插值法结果与模型高低潮时的均方差是3.3×10^{-2} h，二分3次后的5点插值法结果与模型高低潮时的均方差是1.8×10^{-3} h。这些误差主要是由于不同的插值法引起的截断误差，且截断误差随着插值点的确定而无法减小。由此可见，插值法得到的结果与实测高低潮时的均方差均大于表1中的牛顿迭代法与实测高低潮时的均方差。虽说二分3次后的5点插值法比其他的两个插值法的精度高，但此时二分法的计算量超过了表1中牛顿迭代法的计算量，精度却没有达到表1中牛顿迭代法的精度。因此，插值法的求解精度与牛顿迭代法相比精度不高，而且还存在着不能求出满足任意给定精度要求的结果问题。

综上所述，牛顿迭代法的求解结果比插值法更准确，而插值法存在着截断误差，不能给出满足任意精度的高低潮时。

参考文献：

[1] 黄祖珂, 黄磊. 潮汐原理与计算[M]. 青岛: 中国海洋大学出版社, 2005.

[2] 徐汉兴. 潮汐计算技术[M]. 北京: 华文出版社, 2010.

[3] 方国洪, 郑文振, 陈宗镛, 等. 潮汐和潮流的分析和预报[M]. 北京: 海洋出版社, 1986.

[4] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 5版. 北京: 清华大学出版社, 2009.

[5] 庞道德. 潮汐观测资料的调和分析[J]. 海洋科技资料, 1978, 7(6): 32–38.

[6] 陈宗镛. 潮汐学[M]. 北京: 科学出版社, 1980.

[7] 王骥, 方国洪. 高、低潮数据的调和分析[J]. 海洋与湖沼, 1986, 17(4): 318–328.

[8] Foreman M G G, Henry R F. Tidal analysis based on high and low water observations[R]. Canada: Institute of Ocean Sciences, Patricia Bay, 1979:36.

[9] 徐汉兴. 浅水潮综合预报方法的研究[J]. 海洋与湖沼, 1982, 13(3): 207–217.

（本文编辑 武亚庆）