



单桩荷载-沉降曲线的修正指数曲线模型拟合研究

欧阳明, 丁伯阳, 石吉森

(浙江工业大学 建筑工程学院, 浙江 杭州 310014)

摘要: 在对已有的数学模型预测方法进行分析并将指数曲线模型按照一定的修正方法进行优化的基础上, 构造了一个新的修正指数曲线模型。通过对不同类型的单桩静载荷试验数据进行拟合, 相关系数均高于0.996, 拟合效果好于双曲线模型和完整指数曲线模型。修正指数曲线模型对单桩 $P-s$ 曲线能进行很好的描述, 可以利用该模型获得的拟合结果对单桩承载力进行预测。

关键词: 单桩; 荷载-沉降($P-s$)曲线; 竖向静载荷试验; 拟合

中图分类号: TU 473

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2013)01-0031-08

Application of modified exponential curve model in fitting of loading-settlement curve of single pile

OUYANG Ming, DING Bo-yang, SHI Ji-sen

(College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China)

Abstract: Based on the analysis to existing methods of mathematical model prediction and optimized analysis to exponential curve model with certain modified method, we put forward a new modified exponential curve model. The correlativity coefficient of this modified exponential curve model is over 0.996 according to the fitting analysis of actual measurement data of static load test of different types of single piles, and the fitting effect by the model is better than that by hyperbolic model and integrated exponential curve model. The modified exponential curve model can describe $P-s$ curves of single piles well, and it can be used to forecast the ultimate bearing capacity of single piles.

Key words: single pile; loading-settlements ($P-s$) curve; vertical static load test; fitting

单桩竖向极限承载力在桩基工程中是一个很重要的参数, 通过单桩竖向静载荷试验确定单桩竖向极限承载力是目前最常见、最直观、最可靠的方法, 也是我国规范^[1]规定的方法。然而在工程实践中由于多种原因, 很常见的情况是试桩未能加载至破坏, 这势必就给单桩竖向极限承载力的确定带来一定程度的困难。针对上述的问题, 利用静载荷试验得到的不完整的实测数据, 国内外的学者进行了诸多研究, 提出了多种数学模型预测方

法, 其中主要包括: 双曲线模型^[2-11]、指数曲线模型^[2-8, 12-18]、调整双曲线模型^[2, 19]、抛物线模型^[7, 20]、幂函数模型^[3, 8]等拟合出完整的 $P-s$ 曲线。近些年来, 灰色预测模型和人工神经网络预测模型的提出更加丰富和优化了单桩静载荷试验数据处理。然而, 灰色预测模型存在着缺陷和问题, 在应用时会遇到一些预测精度不高以至预测偏差过大的情况, 因此有许多人对此进行了研究并提出了修正方法和提高精度的措施^[21-23], 而灰色预测模型

收稿日期: 2012-05-18

作者简介: 欧阳明(1988—), 男, 硕士研究生, 主要从事岩土工程与水利工程的研究。

从本质上可认为是指数预测模型^[23]，这在一定程度上说明对指数曲线模型进行改进和修正是可行的。而对于人工神经网络预测模型^[24]，虽然也能用来进行单桩 $P-s$ 曲线的拟合，但用来预测的模型本身是一个黑箱系统，最终无法直接得到明确的预测模型，且根据不同的情况预测结果可能会有所不同，这就限制了其在单桩 $P-s$ 曲线拟合上的应用。根据文献[2]的研究，指数曲线模型对灌注桩的极限承载力预测是比较适合的，但对于其它的桩型并未进行深入探讨。在已有的曲线模型上进行一定的调整或者修改在一定程度上可以得到更接近于实际情况的优化模型，因此，本文决定应用指数曲线模型来进行单桩 $P-s$ 曲线的拟合。目前的指数曲线模型主要是普通指数曲线模型和完整指数曲线模型，完整指数曲线模型能很好地表达相应的物理意义，与实际中典型的单桩竖向静载荷破坏试验曲线能很好地对应与符合。为了能进一步提高其拟合的精度，本文提出在完整指数曲线模型的基础上进行一定的改进，构造出一个修正的指数曲线模型以描述单桩静载荷试验的 $P-s$ 曲线。

1 修正指数曲线模型建立

1.1 普通指数曲线模型

普通指数曲线模型一般可以用以下的指数函数表示^[3-4,18]：

$$S=ae^{bP} \quad (1)$$

式中： P 为桩顶荷载； s 为荷载 P 作用下的桩顶位移； a 和 b 为指数曲线的拟合参数。

如果将上式的自变量和因变量互换，转化为用桩顶位移 s 来表示桩顶荷载 P ，则容易得到，该表达式与对数曲线模型相一致。一般地，处理该类非线性方程是先变量变换再进行线性化处理，即对式(1)两边取对数，转化为直线方程式，然后利用线性最小二乘法得到使得误差最小的公式，具体的计算步骤可以参看文献[4]。但该曲线模型与实际情况有较大的差别，也并不存在理论上的极限承载力 P_m ，故本文不选用该模型作为曲线拟合模型。

1.2 完整指数曲线模型

完整指数曲线模型最初由Van der Veen^[12-18]提出，采用如下的数学表达式描述单桩 $P-s$ 曲线：

$$P=a(1-e^{-bs}) \quad (2)$$

式中所有参数意义同前述，此处： $a=P_m$ ， P_m 为当桩沉降量 s 趋于无穷大时 P 的极值，也即理论破坏荷载； b 为衰减因子，反映曲线形状^[13-14,18]。

典型的单桩竖向静载荷破坏试验荷载-沉降曲线可分为3段，即开始时，在小荷载作用下桩土体系呈弹性状态；随着荷载的增加，桩土体系进入弹塑性阶段；当继续加载，桩身不停下沉，荷载趋向稳定，式(2)中的 a 即是该荷载大小。将式(2)展开成幂级数形式，可以比较容易地发现该模型能较好地符合上述规律^[13,18]。由于该模型既能给出理论上的极限承载力 P_m ，又能与典型的单桩竖向静载荷破坏试验荷载-沉降曲线比较吻合，所以相对于普通指数曲线模型其更常见也更常用。该模型满足两个明显特征，即 $s=0$ ， $P=0$ ； $s \rightarrow \infty$ ， $P=P_m$ 。

与其它的模型相比较，求解完整指数曲线模型参数 a 和 b 比较困难。研究者针对该问题提出过不同的解决方法，如文献[14]先计算偏差平方和再分别对两个拟合参数求一阶导数并令其等于零，利用二分法编制计算机程序求解；文献[13]利用变尺度法求解，采用BASIC语言编写计算机程序XI-1，其中涉及最优步长参数的一元函数寻优问题采用Fibonacci法；文献[17]提出用实数编码加速遗传算法(RAGA)对指数曲线模型的参数和理论极限承载力进行优化，并编写了模型的计算程序；文献[18]考虑了上述方法的复杂性以及对人员的要求程度，建议将指数函数式转化为差分形式，再对得到的差分方程进行最小二乘法求解。

1.3 修正指数曲线模型

在已有的曲线模型上进行一定的调整或者修改，在一定程度上可以得到更接近于实际情况的优化模型。文献[19]经过大量的对比和分析，在双曲线模型基础上提出了调整双曲线模型，该模型在双曲线模型方程式的分母中多增加了一项，增加的该项涉及最后第二级荷载下的实测沉降量并新

增一个未知拟合参数。在双曲线模型基础上提出的调整双曲线模型能有效地自动调整曲线弹性变形和弹塑性变形阶段, 且不影响原双曲线模型的两个明显特征(即 $s=0, P=0; s \rightarrow \infty, P=P_m$), 其精度有较大提高, 适应性也较强。文献[25]分析了一些学者在地基沉降-时间关系、桩土之间的传递函数及文献[19]关于抗压桩极限承载力中利用调整、修正过的双曲线模型进行的研究, 构造了一个新的修正双曲线模型拟合抗拔挤扩支盘桩 $P-s$ 曲线。经过分析和调试, 在该修正双曲线模型的分母中增加了一项被称作“调节器”的 $cs^{0.3}$, 以更好地反映所拟合曲线的弹性变形和弹塑性变形的特性。

然而上述主要是针对双曲线模型, 对完整指数曲线模型的调整和修正几乎没有。与式(2)有所不同的是, 文献[15-17]将完整指数曲线模型改写成

$$P=P_m(1-ae^{-bs}) \quad (3)$$

式(3)是在式(2)的基础上于其指数项前乘以一个参数, 由于该参数的引入固然在某些情况下使得式(3)能够更好地拟合实际的单桩 $P-s$ 曲线, 但是正是该参数的缘故, 使得该模型不能够满足式(2)的一个特征, 即: $s=0, P=0$ 。当然也有文献写成如下的形式^[5]:

$$P=ae^{bs}+c \quad (4)$$

可以容易发现式(4)和式(3)本质上是一样的, 如若 $a \neq -c$, 方程式不能满足当 $s=0$ 时 $P=0$ 的条件。因此, 本文不选用在此两式而是在式(2)的基础上进行一定的改进。

为了使完整指数曲线模型的拟合精度有所提高, 在指数项中添加一项, 修正为

$$P=a(1-e^{-bs-cs^d}) \quad (5)$$

式中: 指数项里增加的 $-cs^d$ 希望能有效地在原有完整指数曲线模型基础上自动调整拟合曲线的弹性变形和弹塑性变形相关的特性以更好拟合 $P-s$ 曲线。

要使式(5)满足上述的两个特征, 首先可以设定式中的拟合参数的范围。同式(3)一样, a 是理论极限承载力, 故 $a=P_m>0$; 要满足当 $s \rightarrow \infty$ 时 $P=P_m$, 可以使得 $b>0$ 和 $c>0$ 。现在主要确定的是 d 的取值, 由于当 $d<0$ 时, 会发现与文献[25]相同

的波峰状异常, 故选定 $d>0$ 。与修正双曲线模型有所差异是因为该处不论 $d>1$ 还是 $d<1$ 都是可以满足上述两个特征的, 这里主要是拟合精度的问题, 而修正双曲线模型却不然, 否则可能会不满足第二个特征。

同完整指数曲线模型一样, 修正指数曲线模型的参数拟合相比其他模型更困难, 而且由于增加了拟合参数, 计算过程比完整指数曲线模型要更为繁琐, 文献[18]导出的公式在此处显然不能应用。为此, 本文利用基于MATLAB的曲线拟合箱进行拟合运算, 拟合方法采用信赖域算法, 该方法的基本思想为通过一系列信赖域子问题的最优值逼近最优化问题的解^[26,27], 主要是强制性地地在每次迭代时约定新的迭代点与当前的迭代点之间的步长不能超过某一控制步长, 引入它主要是由于传统的线搜索方法常因步长过大导致计算失败, 其实质相当于在当前迭代点为中心的领域内对近似原问题的模型求解极值。由于其具有很好的稳健性和较强的收敛性, 在良态和病态最优化问题中都较为适用, 故近些年受到比较大的重视, 当然也可以选用其他的求解非线性最小二乘问题的算法, 如Levenberg-Marquardt算法等。

2 单桩 $P-s$ 曲线拟合实例与分析

桩现场试验资料是耗费大量人力、财力和时间获得的宝贵资料^[25], 充分利用收集到的已有资料可以作为科学研究的依据, 防止理论与实际相背离。为此, 本文将从有关文献及书籍资料获得的单桩竖向静载荷试验数据用来检验修正指数曲线模型, 并与修正之前的指数曲线模型和较为常见的双曲线模型相比较。由于桩基的种类较多, 为不失一般性, 本文考虑了各自桩型的差异性, 选择多种不同的桩型加以验证, 其中主要包括轴向抗压桩也考虑抗拔桩, 预制打入桩也包含挖孔灌注桩和钻孔灌注桩, 直身桩也有扩底桩, 并包含了一些比较新的桩型, 如: 大直径超长灌注桩、全螺旋灌注桩、挤扩支盘桩、PHC桩、TSC桩、JPP桩等, 还考虑桩端持力层的不同, 如: 碎砂石、砂卵石或者直接是嵌岩桩等。

2.1 工程实例1：预制桩^[4,13]

根据收集到的资料，选用2根预制桩，对这2根预制桩的静载荷试验数据进行拟合，如图1所示。

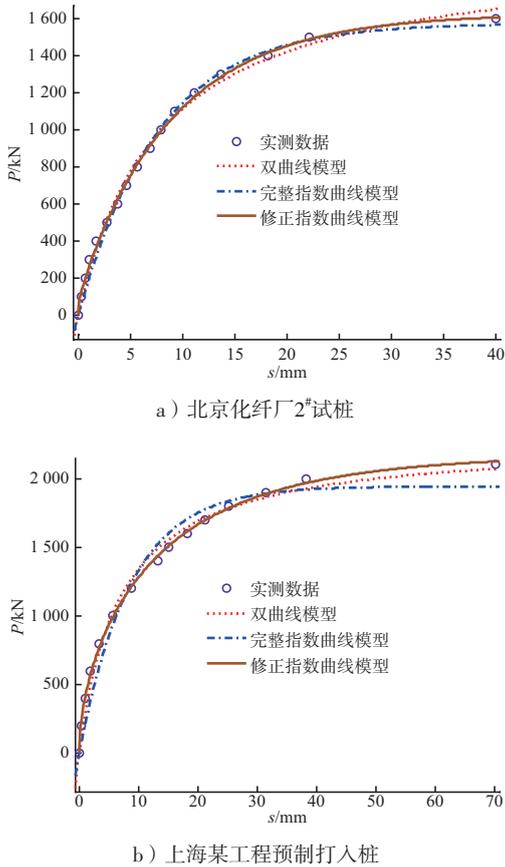


图1 预制桩P-s曲线的3种模型对比

图1a)采用的是30 cm × 30 cm钢筋混凝土预制桩，桩长10 m，桩周土为亚黏土、轻亚黏土，桩尖为中密中砂^[13]。拟合的结果是：双曲线模型、完整指数曲线模型和修正指数曲线模型的相关系数R分别为0.994 2，0.992 7和0.998。相比而言，本文提出的模型适应得更好，双曲线模型次之。图1b)中的预制打入桩的尺度为0.50 m × 0.50 m × 3.0 m^[4]，3种模型的相关系数R分别为0.989 8，0.967 7和0.999，修正指数曲线模型拟合得最好。

2.2 工程实例2：灌注桩^[4,13]

收集文献记录的静载荷试验数据，共选用2根灌注桩进行拟合，3种模型拟合对比的结果如图2所示。

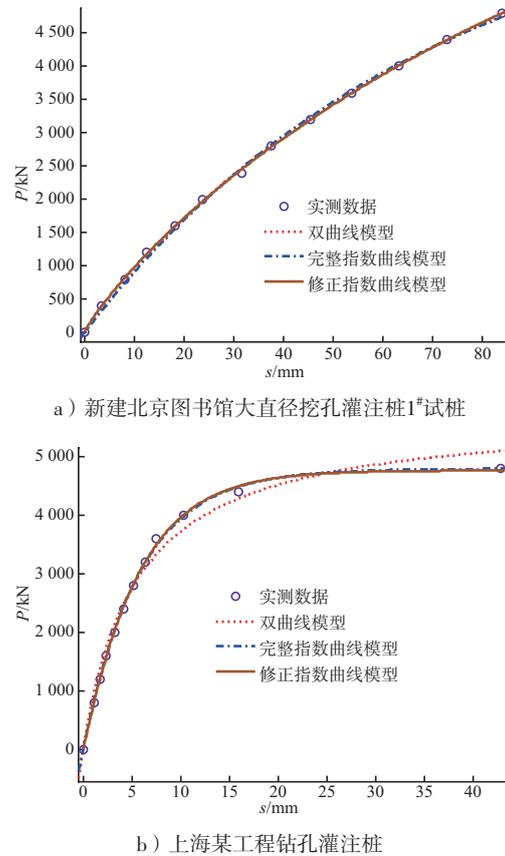


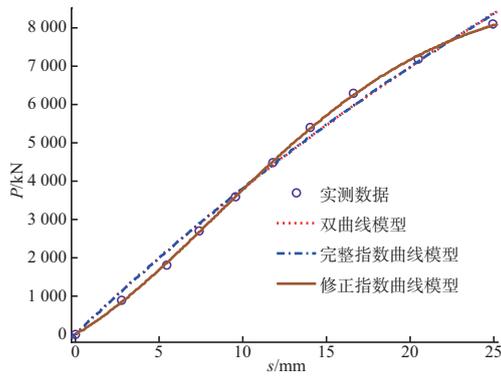
图2 灌注桩P-s曲线的3种模型对比

图2a)新建北京图书馆工程基础采用的是大直径挖孔灌注桩，表层2 m多为填土，下为厚达7 m左右的亚黏土，再下为砂、卵石层，该例1#试桩为芯桩^[13]。应用双曲线模型、完整指数曲线模型和修正指数曲线模型拟合的相关系数R分别为0.999 3,0.998 9和0.999 8。图2b)采用的钻孔灌注桩桩径800 mm，桩长43.20 m^[4]，拟合结果的相关系数R分别为0.985 6,0.998 7和0.998 9，残差平方和SSE分别为 3.567×10^5 , 3.177×10^4 和 2.684×10^4 。可以看出最优模型为修正双曲线模型，完整指数曲线模型也拟合得较好，双曲线模型略差一些。

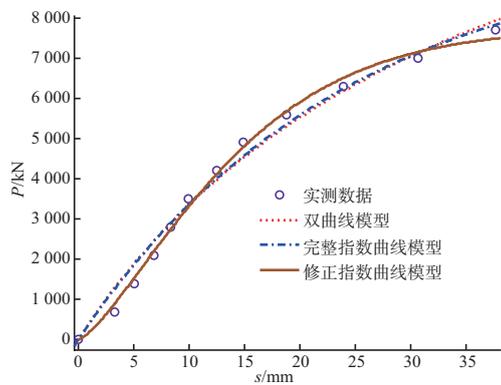
2.3 工程实例3：扩底桩^[28]

上述桩型均为直身桩，除此之外，扩底桩与扩底墩也在现实生产生活中较为常见。根据目前的他人现有试验成果，选用2根扩底桩对其进行拟合，如图3所示。

图3中的场地地基土由填土、粉土、粉细砂、粉质黏土和粗砂组成，扩底桩以粗砂层为持力层，各分层土的主要物理力学指标可以参看文献^[28]，



a) 北京西坝河大成酒店大直径扩底桩SD1



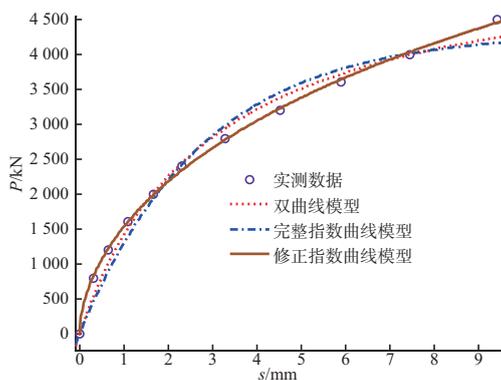
b) 北京西坝河大成酒店大直径扩底桩SD2

图3 扩底桩与扩底墩P-s曲线的3种模型对比

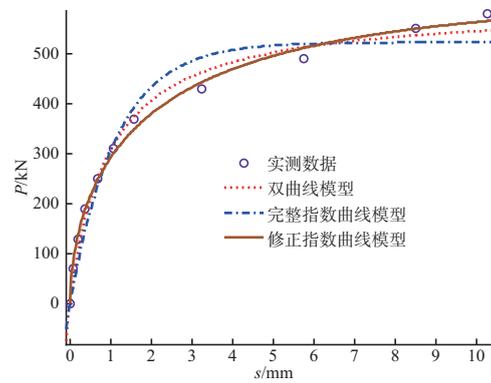
应用3种模型的拟合相关系数 R 分别为0.992 8, 0.993, 0.999 7与0.984, 0.986 6, 0.996 5, 本文的修正指数曲线模型要好于其他两种模型, 其相关系数 R 均高于0.996, 本文提出的修正指数曲线模型依旧最好。

2.4 工程实例4: 抗拔桩^[29,30]

桩基按功能分, 除了抗压桩还有抗拔桩, 其主要承受作用在桩上的拉拔荷载。根据现有的试验成果, 主要收集了较为常见的钻孔灌注桩的抗拔试验数据, 拟合的结果见图4。



a) 杭州中山花园抗拔钻孔灌注桩SBB18



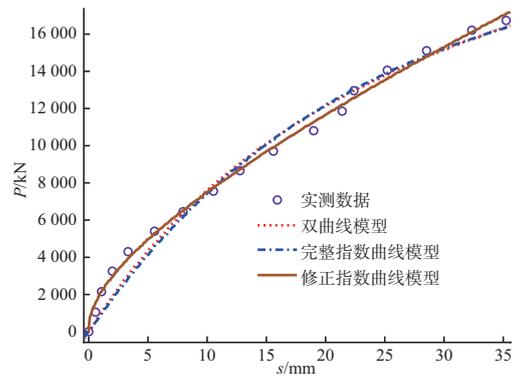
b) 黑龙江速滑馆钻孔灌注桩试桩1#

图4 抗拔桩P-s曲线的3种模型对比

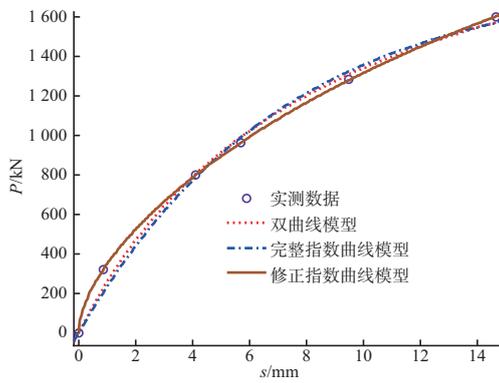
图4a)的场地情况和试验参数可以参见文献[29], 3种曲线模型对其的拟合相关系数 R 分别为0.987 3, 0.974 1和0.999 4。对于图4b)试桩的土层情况为桩身土层为粉质黏土, 软塑至流塑状, 桩端进入粉砂1 m左右, 具体的地质参数以及桩基的设计参数可以查阅文献[30], 其拟合结果为相关系数 R 分别为0.987 6, 0.961 2, 0.996 1和0.968 5, 0.919 5, 0.996 7, 残差平方和SSE分别为 1.211×10^4 , 3.097×10^4 , 1 287和4 647, 1.339×10^4 和2 563。分析抗拔桩的拟合结果可以比较明确地看到, 修正指数曲线模型在拟合中的应用结果更优于其他两种模型, 拟合相关系数均高于0.996。

2.5 工程实例5: 新型桩^[9,15,31-33]

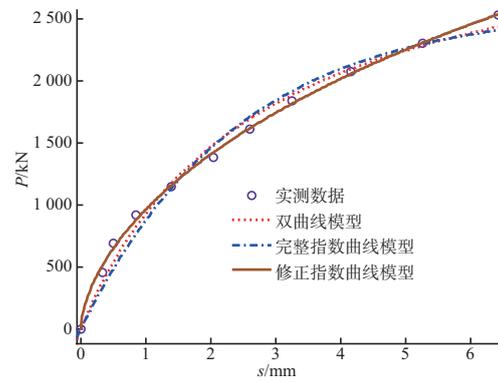
上述的桩型均是比较常见的桩型, 较多学者进行过分析研究, 而近些年新出现某些桩型, 如支盘桩、PHC桩等, 这些桩型与常规的桩型有所不同, 故本文列举了部分新的桩型进行拟合分析, 其中主要包括: 大直径超长灌注桩、全螺旋灌注桩、挤扩支盘桩、PHC桩、TSC桩和高喷插芯组合桩(JPP), 拟合结果见图5。



a) 茅草街大桥大直径超长灌注桩试桩

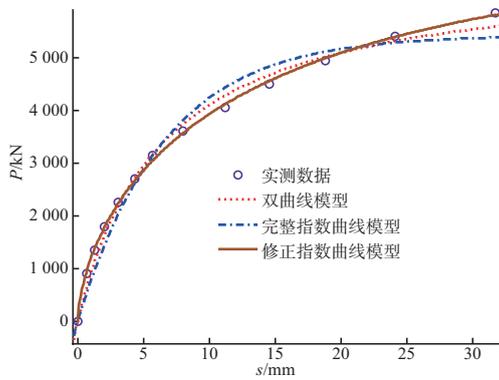


b) 4#工地全螺旋灌注桩74#

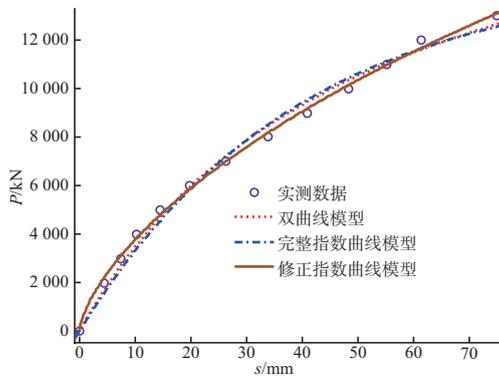


f) 南开大学学生公寓9#楼高喷插芯组合桩

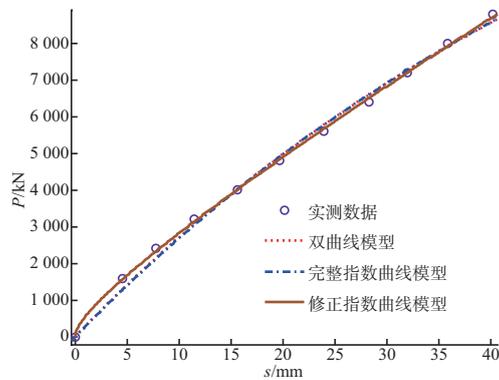
图5 新型桩P-s曲线的3种模型对比



c) 天津嘉海花园嘉怡园13#支盘桩



d) 宝钢PHC长桩CS600



e) 宝钢TSC长桩TSC6-1

图5a) 场地地层分布与物理力学性质指标可以查阅文献[31], 该桩基为洞庭湖软土地区某特大拱桥主墩桩基础, 为大直径超长灌注桩, 试桩的设计参数也可以查看文献[31], 3种模型拟合相关系数 R 为0.982 8, 0.979 7和0.996 8, 修正指数曲线模型精度最高, 双曲线模型次之。对于图5b), 4#工地全螺旋灌注桩74#作为试桩, 其桩长为15 m, 外径为450 mm, 内径为270 mm, 相关的工程地质情况可以参看文献[9], 拟合相关系数 R 分别为0.993 5, 0.990 2和1, 本文提出的模型非常接近于1, 这相当于该模型曲线几乎经过每一个点, 当然由于该例子本身的点数并不多, 造成该结果也是一个原因, 但不可否认的是修正指数曲线模型的拟合效果是最好的。图5c) 的试桩属于天津嘉海花园嘉怡园住宅楼工程, 其土质成分以粉土为主, 支盘桩设两盘两十字分支^[15], 拟合的相关系数 R 分别为0.992 1, 0.974 5, 0.999 2, 修正指数曲线模型要优于其它两种模型, 而双曲线模型又要好过完整指数曲线模型。图5d) 和5e) 的试桩数据均来自于宝钢建设过程, 其中, 图5d) 的试桩CS600为PHC长桩, 而图5e) 的试桩TSC6-1为TSC长桩, 桩的相关规格和试验情况可以参考文献[32], 拟合相关系数 R 为0.993 1, 0.989 3, 0.998 2和0.996, 0.995 6, 0.999 7, 可以看出修正指数曲线模型的相关系数 R 一般是要高于0.996的, 体现了其拟合的高精度性。图5f) 的高喷插芯组合桩(JPP) 桩长36 m, 其段直径650 mm^[33], 最后利用3种模型拟合结果为相关系数 R 为0.988 8, 0.980 2

和0.998 6,修正指数曲线模型拟合结果最优。

3 修正指数曲线模型工程应用

为了更好地查看各级荷载下的实际值与拟合值之间的差异,选取文献[6]中表1的数据作为拟合对象,可以得到表1的结果。

表1 文献[6]静载荷试验数据计算值的验证

沉降/mm	荷载实测值/ kN	荷载计算值/ kN	误差/%	误差绝对值 的平均值/%
0	0	0	0.000 0	
0.62	587	636.92	8.503 9	
1.70	1 175	1 155.97	-1.619 6	
3.40	1 762	1 725.25	-2.085 7	
5.88	2 350	2 348.27	-0.073 6	1.615 8
8.80	2 937	2 928.06	-0.304 4	
12.76	3 525	3 566.78	1.185 2	
16.91	4 112	4 122.82	0.263 1	
21.77	4 700	4 676.20	-0.506 4	

选取文献[33]中的华正岩土有限公司综合楼地基基础采用的高喷插芯组合桩,拟合其静载荷试验数据可以得到表2。

表2 文献[33]高喷插芯组合桩静载荷试验数据计算值的验证

沉降/mm	荷载实测值/ kN	荷载计算值/ kN	误差/%	误差绝对值 的平均值/%
0	0	0	0.000 0	
1.47	440	484.995	10.226 1	
2.52	660	647.808	-1.847 3	
4.19	880	843.781	-4.115 8	
7.01	1 100	1 090.06	-0.903 6	1.990 8
10.50	1 320	1 319.16	-0.063 6	
15.28	1 540	1 559.12	1.241 6	
20.85	1 760	1 775.24	0.865 9	
27.36	1 980	1 973.99	-0.303 5	
36.59	2 200	2 192.51	-0.340 5	

从表1和表2均可以看出实测值和计算值间的误差很小,特别是曲线尾部拟合得很好。两组数据拟合相关系数分别为0.999 7和0.999 0,其精度足以得到保证。

这里需要指出的是由于 $P-s$ 曲线刚开始处于弹性状态而表现为直线变化,所以最开始的点相对于其它数据点拟合误差较大。文献[6]指出可以摒弃刚开始的数据点,而对后面的数据进行拟合,这样处理数据可以得到更接近于实际的曲线变化,则单桩极限承载力预测值将更精确。当然,本文的拟合是包含了所有的数据点的,以避免人为选取不同数据组造成误差,而将本文模型所要拟合的数据先进行取舍,当然也会得到更精确的拟合效果。

由于单桩极限承载力的判定方法各有不同^[9,34],可以根据不同的方法确定其大小,但绝不可以不同的判别标准来判断同一组数据的不同拟合方法,如此就无法比较其方法的优劣,比如可以如文献[9]所述,单桩竖向极限承载力的预测值均取沉降量 s 为40 mm时的承载力。有学者指出以最大曲率点来判定单桩极限承载力^[10-11,14-15],但文献[34]指出: $P-s$ 曲线上的极限荷载点是第二拐点,把曲率最大点作为第二拐点会低估桩的承载力,这方面可以作进一步分析和探讨。

4 结论

1) 双曲线模型、完整指数曲线模型和本文提出的修正指数曲线模型这三种不同的数学模型对不同类型单桩的拟合表明,修正指数曲线模型有很高的拟合精度,拟合效果比双曲线模型和完整指数曲线模型要好,其相关系数 R 要高于0.996,甚至有接近于1的情况。

2) 基于该数学模型的单桩竖向荷载计算值与实测值之间的误差较小,本文两例的误差绝对值的平均值分别为1.615 8%和1.990 8%,且曲线尾部的误差更小,说明了本文提出的修正指数曲线模型拟合的结果是可信的,可以很好地描述单桩 $P-s$ 曲线。

参考文献:

- [1] JGJ 94—2008建筑桩基技术规范[S].
- [2] 邓志勇,陆培毅.几种单桩竖向极限承载力预测模型的对比分析[J].岩土力学,2002,23(4):428-431.

- [3] 蒋忠信. 单桩荷载-位移曲线曲率极值点的数学描述[J]. 勘察科学技术, 2002(3): 3-7.
- [4] 谢耀峰, 吴芳银, 王云球. 试桩未达极限状态时桩的极限承载力预测[J]. 水运工程, 2002(9): 5-8.
- [5] 简洪钰. 小截面静压预制桩承载力预测及取值探讨[J]. 福建工程学院学报, 2005(1): 8-12.
- [6] 张文伟, 陆志华, 陈翀. 试桩未达破坏时单桩极限承载力的确定[J]. 桂林工学院学报, 2006, 26(3): 370-373.
- [7] 罗战友. 单桩竖向极限承载力的灰色预测[D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2001.
- [8] 许宏发, 钱七虎, 金丰年. 描述抗拔桩荷载-位移曲线的幂函数模型[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(5): 622-624.
- [9] 胡焕校, 刘静, 祝世平. 全螺旋灌注桩单桩极限承载力的预测[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2007, 38(6): 1 239-1 244.
- [10] 黄强. 曲率法计算及推算试桩极限荷载的探讨[J]. 建筑结构, 1988(5): 24-27.
- [11] 张琦, 王成. 双曲线上曲率最大点预测桩基竖向极限承载力的预测[J]. 重庆交通大学学报: 自然科学版, 2011, 30(3): 394-397.
- [12] Van der Veen C. The bearing capacity of a pile[C]. Zurich: Procedures of Third International Conference of Soil Mechanics and Foundation Engineering. 1953: 84-90.
- [13] 修朝英, 李大展. 单桩垂直静载试验 $P-S$ 曲线的数学描述和极限承载力的预测[J]. 岩土工程学报, 1988, 10(6): 64-73.
- [14] 奚进泉, 洪登明, 骆筱菊. 确定单桩轴向屈服荷载的一种新方法[J]. 工程勘察, 1994(5): 17-19.
- [15] 张怡权, 夏柏如. 多分支承力盘桩单桩竖向静载荷试验极限承载力的判定[J]. 探矿工程, 2000(5): 27-28.
- [16] 王庆云. 指数曲线模型用于支盘桩单桩极限承载力预测[J]. 山西建筑, 2008, 34(4): 127-128.
- [17] 许小健, 钱德玲, 郭文爱, 等. 基于RAGA的指数曲线模型预测基桩承载力[J]. 岩土力学, 2009, 30(1): 139-142.
- [18] 赵春风, 李尚飞, 鲁嘉, 等. 完整指数函数拟合单桩荷载-沉降曲线的分析[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2010, 38(4): 486-492.
- [19] 赵明华, 胡志清. 预估试桩极限承载力的调整双曲线法[J]. 建筑结构, 1995(3): 47-52.
- [20] 崔树琴, 高盟. 抛物线法在单桩竖向承载力确定中的应用[J]. 水利与建筑工程学报, 2008(1): 88-90.
- [21] 谭冠军. $GM(1, 1)$ 模型的背景值构造方法和应用(I)[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(4): 99-103.
- [22] 张大海, 江世芳, 史开泉. 灰色预测公式的理论缺陷及改进[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(8): 140-142.
- [23] 赵梅娟. $GM(1, 1)$ 模型的改进及其应用[D]. 镇江: 江苏大学, 2005.
- [24] 王成华, 李武君. 单桩荷载与沉降关系曲线的神经网络预测方法[J]. 中国港湾建设, 2003(6): 19-23.
- [25] 蒋建平, 高广运, 刘文白. 描述抗拔挤扩支盘桩 $Q-s$ 曲线的修正双曲线模型研究[J]. 应用基础与工程科学学报, 2010, 18(6): 999-1 009.
- [26] 吴红梅. 非线性约束优化问题的信赖域算法[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2007.
- [27] 刘秋. 非线性最优化的信赖域算法研究[D]. 青岛: 中国石油大学(华东), 2008.
- [28] 高广运, 蒋建平, 顾宝和. 两种静载试验确定大直径扩底桩竖向承载力[J]. 地下空间, 2003, 23(3): 272-276.
- [29] 周丽军. 抗压与抗拔桩 $Q-s$ 曲线灰色分析[J]. 市政技术, 2006, 24(5): 349-351.
- [30] 张兵, 吴滨, 刘建平, 等. 钻孔灌注桩的抗拔承载力[J]. 低温建筑技术, 1997(2): 48-49.
- [31] 赵明华, 邹新军, 刘齐建. 洞庭湖软土地区大直径超长灌注桩竖向承载力试验研究[J]. 土木工程学报, 2004, 37(10): 63-67.
- [32] 王怀忠. 宝钢工程长桩理论与实践[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2010.
- [33] 任连伟, 刘汉龙, 张华东, 等. 高喷插芯组合桩极限承载力的灰色预测[J]. 防灾减灾工程学报, 2009, 29(2): 193-200.
- [34] 吕福庆, 吴文. 桩的垂直静载试验极限承载力判定方法综述[J]. 岩土力学, 1995, 16(4): 85-93.

(本文编辑 武亚庆)