

阵列式雷达河面流场监测系统研究

(长江武汉航道工程局、湖北 武汉 430014)

张

楚

摘要:随着智慧航道建设的发展,流速监测在水文信息的精准获取和实时管理中扮演着重要角色。针对复杂水域环境 的流速监测研究相对缺乏的问题,提出并采用阵列式雷达测流系统,在长江的某水域现场进行阵列式雷达测流试验,验证 其在复杂水域条件下的监测效果。该系统利用 P 频段雷达,通过折线阵列数字波束形成技术和布拉格散射原理,实现对水 流流速的非接触实时监测,通过模糊聚类算法筛选各通道的多普勒特征,并将其数据与声学多普勒流速剖面仪(ADCP)同步 测流数据进行对比。结果表明,阵列式雷达测流系统在复杂水域环境下的测流效果优异,为智慧航道背景下的流速监测提 供了一种高效、可靠的技术手段。别除船舶上行的不利影响后,雷达波表面流场数据准确性较高,试验观测点基于雷达波 获取的流速与 ADCP 同步测流数据相比的偏差总体不大于7.00%。

关键词:流速监测;非接触式;阵列式雷达;流场
 中图分类号:U612.2
 文献标志码:A

文章编号: 1002-4972(2025)06-0167-10

Arrayed radar river surface flow field monitoring system

ZHANG Chu

(Changjiang Wuhan Waterway Engineering Bureau, Wuhan 430014, China)

Abstract: With the development of smart waterway construction, flow velocity monitoring plays an important role in the accurate acquisition and real-time management of hydrological information. In response to the relative lack of research on flow velocity monitoring in complex water environments, an array radar flow measurement system is proposed and adopt. The array radar flow measurement experiment is conducted on-site in a certain water area of the Yangtze River to verify its monitoring effectiveness under complex water conditions. The system utilizes P-band radar and utilizes line array digital beam-forming technology and Bragg scattering principle to achieve non-contact real-time monitoring of water flow velocity. Fuzzy clustering algorithm is used to screen the Doppler characteristics of each waterway, and the data are compared with acoustic Doppler current profiler (ADCP) synchronous flow measurement data. The results show that the array radar flow measurement system has excellent flow measurement performance in complex water environments, providing an efficient and reliable technical means for flow velocity monitoring in the context of smart navigation. After removing the adverse effects of ship upward movement, the accuracy of radar wave surface flow field data is high, and the overall deviation of flow velocity obtained based on radar waves at experimental observation points is not greater than 7.00%, comparing with the ADCP synchronous flow measurement data.

Keywords: flow velocity monitoring; non-contact; arrayed radar; flow field

实时流速是河流水文监测的重要数据,也是 水资源管理与水利工程的核心内容之一,更是现 代化智慧水利建设的关键环节之一^[1-3]。通过实时 监测水位、流速、泥沙含量等关键参数,为船舶

收稿日期: 2024-08-26

作者简介:张楚 (1974—),男,硕士,高级工程师,从事航道工程施工及管理。

通航安全提供动态预警,有效预防搁浅、碰撞等 事故,同时通过长期数据分析可精准掌握航道演 变规律,指导疏浚工程规划与航道维护,提升通 航效率并延长航道使用寿命。其必要性体现在保 障航行安全、优化航运调度、降低运营成本等多 个维度、尤其在应对极端天气和水文突变时、及 时的水文数据支撑能显著增强航道应急管理能力, 是构建智慧航道系统的基础数据源。而受限于河 流环境与气候影响等现实挑战,以及对测流方式 的安全性、准确性与实效性等高要求、流速测验 一直是传统测量的难点,因此传统接触式测流方 案在实际应用中常无法布置或正常施测,例如在 洪水期,河道水流流速快、含沙量高且漂浮杂物 多,不仅容易导致测量仪器受损,还会对测量人 员的安全构成严重威胁^[4];而在枯水期,水流量 小,部分河道呈现水浅滩多,测流仪器难以部署; 水运航道上船舶频繁航行,而传统测验测报往往 需要封锁航道,导致航行与测验之间相互于扰, 难以兼顾;界河一般无法架设缆道,流量测验测 报难度更大^[5];基于水位-流量曲线的流量测验方 法过去发挥了重要作用,但由于水位-流量曲线大 都缺乏高水位时的流量资料、因此这种方式很难 得到满意的流量精度^[6]。

我国河流众多且分布广泛,具有流域面积差 异大、河道断面复杂、多洪水期等规律特征,目 前流速测量仍以缆道测流为主,其利用横跨河岸 的缆道作为载体,使用转子式流速仪,对河流断 面的不同位置进行流速水深测量,适用于日常作 业,缺点是建站维护成本高、位置固定、测量过程 费时费力、时效性低、不能实时测量^[7]。而基于声 学多普勒效应测量水流流速的声学多普勒流速剖面 仪(acoustic Doppler current profiler, ADCP),则通 过快速分析声波的回波变化,解决了实时测量问 题,但 ADCP 通常安装在水下,在浑浊度高、杂 物较多的水体中表现较差,且仪器长期置于水中, 维护成本高、容易丢失^[89]。因此,同样利用多普 勒效应原理,雷达测流系统向水面发射微波并分 析回波频率变化,实现了非接触式的水流流速监 测,既避免了水下设备的部署难题,又减少了设 备的维护成本和丢失风险;其次,雷达测流系统 面对浑浊水体环境可以稳定工作,适用于较复杂 的水流条件;最后,该方法同样可实现实时数据 采集,具有较高的时效性^[10]。雷达波在长江航道 测流中的应用背景源于传统水文监测技术(如接触 式流速仪)在复杂航道环境下存在效率低、风险 高、数据连续性不足等局限,亟需非接触、高精 度的新型测流手段;其目的是通过全天候、全河 段实时动态监测流速、流量,提升航道通航安全 保障能力,支撑长江黄金水道智能航运体系建设, 并为防洪调度、生态保护提供科学数据支撑^[11-13]。

本文创新性地提出一种适用于复杂水域环境 的阵列式雷达测流系统,通过融合 P 频段雷达、 折线阵列数字波束形成技术与布拉格散射原理, 实现了多维度水流动态的非接触实时感知。区别 于传统方法,本方法采用模糊聚类算法对多通道 多普勒特征进行智能筛选,攻克了复杂水域信号 干扰难题,显著提升流速监测精度与数据稳定性。 该系统在长江典型水文站的实证中展现出对湍流、 漩涡等复杂流态的高效捕捉能力,为智慧航道建 设提供了首套可工程化应用的阵列式雷达测流解 决方案。

1 测流方法

1.1 阵列式雷达测流基本方法

阵列式雷达河面流场监测系统是基于1部 P 波段脉冲多普勒雷达构建。P 频段雷达通常工作 在230~1000 MHz 的频率范围内(部分定义扩展至 300~1000 MHz),属于超高频波段,其波长为 0.3~1.3 m,具备较强的穿透能力和远距离探测特 性。该频段雷达多用于战略预警、空间目标监测 及穿透植被/浅层地表探测,典型发射功率可达兆 瓦级,脉冲宽度微秒至毫秒级,采用大型相控阵 天线实现宽覆盖与高分辨率,在复杂环境中平衡 了分辨力与抗干扰性能。雷达测流中,电磁波在 空气中的传播速度通常取近似光速 3×10⁸ m/s,在 实际空气环境为 2.997×10⁸ m/s。当发射的电磁波 信号投射到水面,会与水面的波浪发生相互作用, 产生布拉格散射,见式(1);雷达利用这种布拉格 散射特性发现河流水面回波,利用电波传播的多 普勒效应测量特定水面波长的河流移动速度,见 式(2);利用接收回波与发射波的时间差来测定距 离,见式(3);通过采用多通道接收阵列的折线阵 列数字波束形成(digital beam forming,DBF)技术提 取不同方位角度上的流场特征信息,见式(4)。

$$\lambda_{\rm b} = \frac{\lambda}{2{\rm sin}\theta} \tag{1}$$

$$v_{\rm r} = \frac{f_{\rm D} c_0}{2f_0} \tag{2}$$

$$R = H\cos\alpha - H\cos\beta \tag{3}$$

$$\Delta \phi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \tag{4}$$

式中: λ 为雷达波的波长; θ 为雷达波入射角; λ_b 为水面波长; f_D 为多普勒频移,由系统测得; c_0 为电磁波在空气中的传播速度; f_0 为雷达的发射 频率; v_r 为径向速度分量,指沿雷达方向的水体 表面流速分量; R 为河流表面与雷达之间的距离; H 为雷达天线距离河面的高度; t 为电波发射和回 波接收的时间差; α 为探测最远点与雷达波束的 夹角; β 为测量最近点与雷达波束的夹角; $\Delta\phi$ 为 回波相位差; d 为两接收天线之间的距离。

雷达测流过程见图 1。探测距离越远, *H* 应设 置越大, 如探测距离 800 m 时, *H* 应大于 26 m; *R* 为监测宽度, 最大可以超过 1 000 m; *L* 为阵列 式雷达河面流场监测系统测量的距离间隔, 即距 离分辨率, 可以设置为 10、20、40 m; α 应大于 1.5°; β 应不小于 45°, 以免最近处的河流出现在 雷达波束照射盲区内。



图 1 雷达测流布置 Fig. 1 Flow measurement layout by radar

为实现水流流速的精准监测,本文设计一种 基于 P 频段雷达的测流方法,系统架构见图 2,其 中雷达采用脉冲多普勒体制、天线共址、收发分 开。首先利用功率放大器用于提供信号激励源, 生成 P 频段的雷达信号作为测流的基础信号,当 雷达波照射到河面上,同时获取河面各距离段上 的回波信号, 雷达得到的是每个距离段上的平均 速度。其中雷达发射脉冲的频率是 20 kHz, 即每 秒发射2万个脉冲,5 min 完成表面流速测量,因 此获得的每个距离段上表面流速是600万次测量 结果的平均值。雷达工作在 P 频段, 散射信号主 要是布拉格散射,使用带通滤波器将信号频带限 制在特定范围, 以隔离出有效的接近波和后退波 信号,减少背景噪声干扰,提升信号的信噪比。 在信号处理阶段,对回波数据进行常规延迟-多普 勒处理,同时利用3个八木天线信号的幅度和相 位响应,采用折线阵列 DBF 成技术和超分辨处理 算法,角分辨率可达到 2°。最后对信号处理后的 数据进一步通过中值滤波,去除测量过程中的野 值,并传输到终端处理模块,在终端显示、分析 和存储。



图 2 雷达测流方法流程 Fig. 2 Process of radar flow measurement method

1.2 高精度阵列波束测流方法

阵列式雷达河面流场监测系统的接收天线阵 列根据安装位置和指向角采集来自不同方向的信 号,利用不同的加权系数控制每个接收通道的信 号强度,由此形成了多个空间方向的波束,使得 雷达能够同时监测多个方向的信号回波。然后通 过加权处理,雷达形成的多波束方向图,见图 3, 从而可以更广泛地覆盖河面不同位置的流速信息。



图 3 加权处理后雷达形成的多波束方向图 Fig. 3 Multibeam direction diagram formed by radar after weighted processing

对接收到的信号进行脉冲积累和距离分组, 通过频谱变换实现对不同距离的信号处理。在距 离-多普勒空间中完成二维信号处理,以提取出每 个距离单元的频谱分布。在得到的频谱分布中,对 每个距离单元按频域选取最大值,提取对应的多普 收集所有指向不同方位向的空间合成信号, 对同一方位角度、同一距离单元不同时刻计算得 到的流速信息进行平滑处理,采用方差加权降低 数据抖动的方法,降低观测流速的起伏,提高数 据的稳定性;并分别计算得到所有空间方位指向 角度下的不同距离单元的稳定流速信息,获取对 应的空间距离-方位流速矢量场数据,其中,对 应方位向上不同距离单元的流速信息v计算公 式为:

$$v = \frac{c_0 f_0 L}{2f_0 \sqrt{L^2 - H^2} \cos\varphi} \tag{5}$$

式中: φ 为对应的指向方位角度; L 为当前计算的 距离门。

2 设备部署与实例分析

2.1 阵列式雷达测流系统组成

阵列式雷达河面流场监测系统遵循标准、开放的技术路线进行设计,由硬件和软件组成,其中的供电系统机箱、太阳能电池板、太阳能电池板安装支架均为选配,底座用于固定支架,其他的系统组成见表1。阵列式雷达河面流场监测系统

结构见图 5, 技术指标的控制标准见表 2。

表 1 阵列式雷达河面流场监测系统组成 Tab. 1 Composition of river surface flow field

monitoring system for array radar					
名称	组成				
支架	包括高度支架和角度支架				
发射天线、接收 天线	1发3收				
主控箱	包括收发组件、信号处理、工控机(数据处 理)、电源、远程控制系统等				
射频电缆	包括电缆和功分网络等				
供电系统线缆	包括市电充电线、机箱供电线和太阳能充 电线				



图 5 阵列式雷达河面流场监测系统组成

Fig. 5 Composition of array radar river surface flow field monitoring system

表 2 阵列式雷达河面流场监测系统技术指标控制标准

	Tab. 2	Technical indicators	control standard	of river flow	field monitoring	system of array	radar
--	--------	-----------------------------	------------------	---------------	------------------	-----------------	-------

		最佳使	用环境				天线位	置		
河宽/m	流速/(n	$\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}^{-1}$)	水深/cm	水波纹高度/cm	水平プ	方向/cm	垂直方		朝向河南	面视角/(°)
≥100	≥0	. 5	最小 15	最小 2	距水面	不小于 20	高出水面	4~20	>45	或<-45
				技术性能指标				实时性	ŧ	适应性
工作频率/ MHz	探测河面 宽度/m	距离 分辨率/m	测速范围/ (m·s ⁻¹)	测速误差(均方根 误差)/(m·s ⁻¹)	速度分辨率/ (m·s ⁻¹)	方位覆盖 范围/(°)	方位分辨率/ (°)	单次测量 min	封间/	工作 温度/℃
380	100~1 000 (单台)	10~20 (可设置)	0.5~20.0	≤0.01	≤0.01	优于±45	优于3	优于1 (可根据需要	0 要设置)	室外-40~65

2.2 阵列式雷达测流系统实例分析

2.2.1 概况

2021年,阵列式雷达河面流场监测系统在湖 北省枝江市李家渡站姚家港毛家花屋观测点进行 了应用。设备安装完成后,由于设备现场条件限制,设备与河岸水流方向并不是严格对齐,而是存在一个向上游约15°的偏角,使得河面流场向上游偏移15°,在后续处理中,通过相关数据处理修

正,即可实现垂直于河道方向表面流场的测量。 监测系统安装完成后,即可不间断地实现对河面 分段流速和流场的不间断测量,并通过监测系统 的远端数据传输系统,将测量结果实时传输到对 应的服务平台,实现对航道流态的实时监控,相 关结果见图 6、7。



图 7 李家渡站河流表面流场特征参数



图 7 中河流表面流场的测量范围为上下游 45°范围, 方位角度间隔为 3°, 距离门分辨单元为 22.5 m。

2021 年 12 月至今,采用雷达波水文监测系统 对芦家河沙泓中段毛家花屋急流段流场实施了实 时监测,并同步布置多普勒流速剖面仪水文断面 以捕捉6000、8000及10000m³/s流量级下的流 速。芦家河水道水文监测布设方案见图8。



图 8 芦家河水道水文监测布设方案 Fig. 8 Hydrological monitoring layout scheme of Lujia River waterway

2.2.2 表面流场数据收集

本文整理了 2021 年 12 月—2022 年 8 月的测 流数据。雷达波测流直径 800 m、观测范围 60°, 每 10°布置 1 条流线(共 7 条),流线上每隔 10 m 布置 1 个测流点,实时捕捉流场数据。

2.2.3 表面流场数据的准确性

剔除船舶上行的不利影响后, 雷达波表面流 场数据准确性较高, 姚家港毛家花屋观测点基于 雷达波获取的流速偏差总体不大于 7.00%。

基于流速垂向分布得到垂线平均流速等于 0.85 表面流速的换算关系,以多普勒流速剖面仪水文断 面流速为参照值,分析雷达波流场监测值的准确 性。图9为扇形的雷达波监测流场,每隔 0.2 m/s 有1条流速线,同时给出了转换后的水文断面表 面流速分布:并统计得到两者偏差,结果见表 3。 可以看出,基于不同观测手段得到的表面流速大 小一致性较好,除个别测次外,总体差异不大于 7.00%。例如6000 m³/s 流量级下 ADCP 观测到的 表面流速为1.850~2.617 m/s,基于雷达波水文监 测系统观测到的表面流速为 1.87~2.73 m/s, 整体 偏大 1.00%~5.54%; 8 000 m³/s 流量级下,各测 量的偏差比在-6.38%~4.03%; 10 000 m³/s 流量 级下偏差幅度不大于 5.74%。可见,基于雷达波 水文监测系统观测到表面流速与传统观测值偏差 不大,准确度较高。



a) 流量6 000 m³/s



c) 流量10 000 m³/s



Fig. 9 Comparison of section flow velocity between radar wave hydrological monitoring flow field and other observation modes

1 40. 0	110.	ucviation		, wave 1	ingui ological	monitoring
Tab. 3	Flow	deviation	of radar	wave	hydrological	monitoring
衣	3 F	首达成小义	监测与 A	DCP	观测衣面加边	「「「「「「」」」

雨计边步立步测片 ADOD 观测主声法法位学

流量/	表面流速/	偏差/	
$(m^3 \cdot s^{-1})$	ADCP 换算	雷达波监测	%
	1.850	1.87	1.08
6.000	2. 152	2.21	2.70
6 000	2. 577	2.72	5.55
	2.617	2.73	4.32
	2.457	2.30	-6.39
	2.625	2.56	-2.48
8,000	2. 681	2.61	-2.65
8 000	2. 681	2.58	-3.77
	2.630	2.55	-3.04
	2. 124	2.21	4.05
	2.000	1.95	-2.50
	2. 147	2.20	2.47
10 000	2. 584	2.58	-0.15
	2.948	2.87	-2.65
	2.966	2.91	-1.89
	3.045	2.87	-5.75
	3.036	3.01	-0.86
	3.111	3.12	0. 29
	3.164	3. 18	0. 51

3 结论

 1) 陈列式雷达系统集抗干扰手段、智能化处 理技术、高分辨折线阵列角度分辨技术、模糊聚 类技术和滤波降抖动技术于一体,硬件架构设计 先进、安装方便快捷,软件设计采用目前各类智 能技术,有效解决了传统设备存在的部署环境受 限、难以实时测量等问题。

2)采用陈列式雷达系统可以有效解决采用非接触式技术实现对河流水面流场、流速及流量的监测问题,可实现全天候、连续、自动作业,特别对传统技术难以完成的高浑浊度水域、极浅水域的流速和流量实现准确测量。雷达安装在河岸上,天线主轴垂直于河流,与河流无接触,根据接收到的指令或者预设的工作方法工作,获取河流表面流场,存储并传输到指定地点。

3)陈列式达系统对传统的雷达河流测量装置 进行了多方面的改进,在雷达信号分析方面,采 用折线阵列信号处理技术,具有比平面阵列更大 的视场角,能够实现河面的有效覆盖,通过三通 道折线阵列信号融合技术,形成河面流速矢量场 信息。

4) 阵列式雷达河面流场监测系统通过实时、高精度获取河道水流速度、流向及水位动态数据,可显著提升内河航运的安全性与运行效率。该系统能够为航道管理部门提供精准的流场信息,辅助识别暗流、漩涡等潜在危险区域,优化船舶航行路径规划和通航调度;同时通过数据积累支持航道疏浚、水利设施改造等科学决策,降低航运事故风险并提升物流效率,对推动内河航运智能化升级、保障流域经济可持续发展具有重要支撑作用。

参考文献:

- [1] XIE D F, PAN C H, GAO S, et al. Morphodynamics of the Qiantang estuary, China: controls of river flood events and tidal bores[J]. Marine geology, 2018, 406: 27-33.
- [2] 周亚平, 陈金水, 高军. 智慧灌区建设要素及关键 技术[J]. 水利信息化, 2019(2): 11-18, 23.

ZHOU Y P, CHEN J S, GAO J. Construction elements and key technologies of smart irrigation districts [J]. Water resources informatization, 2019(2): 11-18, 23.

- [3] 江木春,袁锐,张文欢.金鸡滩二线船闸工程原型观测 方法[J].水运工程,2024(6):164-169.
 JIANG M C, YUAN R, ZHANG W H. Prototype observation method for Jinjitan second line ship lock project [J]. Port & waterway engineering, 2024 (6): 164-169.
- [4] 赵小楠.基于光流计算的河流表面流速估计研究[D].
 西安:西安电子科技大学, 2021.
 ZHAO X N. Research on river surface velocity estimation

based on optical flow calculation [D]. Xi'an: Xidian University, 2021.

- [5] 林思夏,曾仲毅,朱云通,等.侧扫雷达测流系统开发与应用[J].水利信息化,2019(1):31-36.
 LIN S X, ZENG Z Y, ZHU Y T, et al. Development and application of tangent sweeping radar flow measurement system [J]. Water resources informatization, 2019 (1): 31-36.
- [6] 陈细润,石永恩.攀枝花水文站移动式智能雷达测流 系统应用[J].水利水电快报,2023,44(S1):61-64.

CHEN X R, SHI Y E. Application of mobile intelligent radar flow measurement system at Panzhihuahydrological station [J]. Express water resources & hydropower information, 2023, 44(S1): 61-64.

- [7] 张松吉,李鹏,马松根,等.水文巡测测流仪器设备现状[J].水利信息化,2020(4):55-59.
 ZHANG S J, LI P, MA S G, et al. Current status of flow measurement instruments and equipment for hydrological patrol [J]. Water resources informatization, 2020 (4): 55-59.
- [8] 谢慧,柳义成,张明敏. 声学多普勒流速剖面仪计量测 试系统设计[J]. 仪表技术与传感器, 2020(10): 68-72.
 XIE H, LIU Y C, ZHANG M M. Design of metrological test system for acoustic Doppler current profiler [J]. Instrument technique and sensor, 2020(10): 68-72.
- [9] 朱晓伟, 冯杰, 沈辉, 等. 固定式 ADCP 设备在嘉兴市平 原河网通量监测中的应用研究[J]. 气象水文海洋仪 器, 2024, 41(3): 41-44.

ZHU X W, FENG J, SHEN H, et al. Application research of fixed ADCP equipment in flux monitoring of plain river network in Jiaxing City [J]. Meteorological, hydrological and marine instruments, 2024, 41(3): 41-44.

[10] 曾佑聪,石瑞格,陈晨.雷达波在线测流及远程集控 系统的研究与应用[J].水力发电,2017,43(11):70-74,85. ZENG R C, SHI R G, CHEN C. Research and application of radar wave on-line measurement and remote centralized control system [J]. Water power, 2017, 43(11): 70-74, 85.

- [11] 李雨,李薇,裴丁彦,等. 定点式雷达波测流优化方案 研究及适用性分析 [J]. 水文, 2021, 41 (5): 53-58.
 LI Y, LI W, PEI D Y, et al. Study on optimal scheme of fixed-point radar current meter and its applicability [J]. Hydrology, 2021, 41 (5): 53-58.
- [12] 刘和远,赵世斗,陈涛.定点式雷达波在线测流技术应用研究[J].人民黄河,2024,46 (S2):8-9.
 LIU H Y, ZHAO S D, CHEN T. Research on the application of fixed-point radar wave online flow measurement technology [J]. Yellow River, 2024, 46(S2):8-9.
- [13] 高强, 云金召. 青海高原雷达波测流系统流量系数率 定及准确性: 以新寨水文站为例 [J]. 中南民族大学 学报(自然科学版), 2023, 42 (5): 592-599.

GAO Q, YUN J Z. Flow coefficient calibration and accuracy of radar wave flow measurement system in Qinghai Plateau: a case study of Xinzhai Hydrological Station [J]. Journal of South-Central University for Nationalities (natural science edition), 2023, 42 (5): 592-599.

(本文编辑 王璁)

(上接第157页)

[6] 船闸启闭机设计规范: JTJ 309—2005[S]. 北京: 人民交 通出版社, 2006.

Code for Design of Headstock Gears of Shiplocks: JTJ 309–2005[S]. Beijing: China Communications Press, 2006.

[7] 周吉.船闸人字门启闭机液压缸屈曲稳定性分析[D].
 武汉:武汉大学, 2021.
 ZHOU J. Buckling stability of horizontal hydraulic cylinder

for miter gate hoist[D]. Wuhan: Wuhan University, 2021. [8] 燕怒,孙宜华.金属结构设计[M]. 武汉: 华中科技大学

出版社,2012:94-95. YAN N,SUN Y H. Metal structure design[M]. Wuhan:

Huazhong University of Science and Technology Press,

2012: 94-95.

- [9] 张洪伟,高相胜,张庆余. ANSYS 非线性有限元分析方 法及范例应用[M]. 北京:中国水利水电出版社, 2013. ZHANG H W, GAO X S, ZHANG Q Y. Nonlinear finite element analysis method of ANSYS and its example application [M]. Beijing: China Water & Power Press, 2013.
- [10] 赵佳音. Riks 弧长法在压杆非线性屈曲分析中的应用[J]. 船舶标准化工程师, 2021, 54(1):67-70.
 ZHAO J Y. Application of riks arc length method in non-linear buckling analysis of compressive rods [J]. Ship standardization engineer, 2021, 54(1):67-70.

(本文编辑 王传瑜)