

· 港口 ·



船舶到港分布律的研究 及合理泊位数的计算

张怀慧¹, 蒋大煌^{1,2}

(1. 大连海洋大学 海洋与土木工程学院, 辽宁 大连 116023; 2. 大连水产规划设计研究院有限公司, 辽宁 大连 116023)

摘要: 用数理统计的方法分析、推求、论证船舶到港的分布律服从二项分布, 指出其数学物理意义明确、符合“客观规律”, 泊松分布只是二项分布的一种方便的近似; 并通过实例予以验证两种分布的相似性, 同时分析、论述了泊松分布的特征; 最后给出了利用泊松分布替代二项分布的使用条件, 举例比较两种计算方法的简捷与繁琐; 建立合理泊位数的判定式, 介绍利用排队论计算合理泊位数的具体方法和步骤, 并通过实例予以运用。

关键词: 船舶到港分布律; 二项分布; 泊松分布; 合理泊位数; 爱尔朗分布; 排队论; 泊位利用率

中图分类号: U 651⁺.4

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2014)09-0051-06

Distribution law of ships to port and calculation of reasonable number of berths

ZHANG Huai-hui¹, JIANG Da-huang^{1,2}

(1. School of Ocean and Civil Engineering, Dalian Ocean University, Dalian 116023, China;

2. Dalian Fishery Planning Design and Research Institute Co., Ltd., Dalian 116023, China)

Abstract: The paper demonstrates that the distribution law of ships to port obeys the binomial distribution by mathematical statistics, the mathematical and physical meanings are clear, and afford to the objective law. The binomial distribution matches the truth. The Poisson distribution is a similar method of the binomial distribution. This paper validates the similarity of the two distributions by examples, expounds the feature of Poisson distribution, and points out the condition of using Poisson distribution instead of the binomial distribution by comparing the two calculation methods. This paper also establishes the discriminant of the rational number of berths, introduces the method and step of calculation of reasonable number of berths by the queuing theory, and applies them to practical cases.

Keywords: distribution law of ships to port; binomial distribution; Poisson distribution; rational number of berths; Erlang distribution; queuing theory; berth occupancy

港口规划、工程可行性研究及港口总体设计中的重要内容之一, 是确定港口的泊位数, 而泊位数的确定又和来港船舶的分布律密切相关。来港的船舶, 包括客、货轮, 以致于班轮, 往往不能预期到达。主要受制于自然因素和社会因素的影响, 如海上风、浪、流、风暴潮、海啸、雾等海象及气象的影响, 增加了海上航行的时间; 物流、信息流及港口设施等诸多社会因素的影响,

增加了船舶离开甲港驶向乙港时间的不确定性。因此, 到港船舶是一个随机事件, 其分布近似于泊松分布, 这已是港工界的共识, 也为联合国贸易发展委员会 (UNCTAD) 所认同。

港口的服务对象为船舶, 合理泊位数的确定, 除服务对象为主要决定因素外, 另一影响因素则是费用, 港口的建设、维护、管理费用由港方 (业主) 承担, 船舶停泊、装卸的费用由船方 (客

收稿日期: 2014-01-22

作者简介: 张怀慧 (1941—) 男, 教授, 从事港口与海岸工程教学及研究工作。

户) 承担。业主企望在完成预定(全年)吞吐量的前提下, 少建泊位为宜; 客户则要求船舶进港后能尽快靠泊装卸作业, 缩短驻港时间, 减少费用, 做到“随到, 随走”; 两种愿望相悖。可见, 泊位数和来港船舶之间有个最佳配合比的问题, 所谓合理泊位数, 即指在完成预定(全年)吞吐量的前提下, 发生在港方和船方的费用之和最小, 此时的泊位数便是合理泊位数或最佳泊位数。

合理泊位数的确定, 目前有“规范法”^[1], 这是我国现行规范采用的方法, 通过计算各类不同码头单个泊位的年通过能力来确定泊位数。其中涉及到作业天数、设计船型的载货量、船吨量、船时效率、泊位利用率、生产不平衡系数等; 不足之处是没有考虑港口和船舶的费用。除此还有“坐标法”^[2], “数理统计法”^[3-4], “排队论法”^[5-6]等。排队论 (queuing theory), 也称服务系统理论, 最早由丹麦数学家 (电气工程师) 爱尔朗 (A. K. Erlang) 1910 年提出, 20 世纪 40 年代已发展成为运筹学的一个分支, 20 世纪 50 年代, 英国统计学家堪道尔 (D. G. Kendall) 用 A/B/C 表示排队系统, 其中 A-顾客 (船舶) 到达时间分布; B-服务 (装卸) 时间分布; C-服务机构 (港口) 的服务台的个数 (码头)。本文重点推求船舶到港分布律, 并利用排队论计算合理泊位数方法的介绍及应用。

1 到港分布律的推求

船舶到港分布律服从泊松分布, 这只是一种近似而已, 究其何以如此, 在下面分析与讨论中予以验证。

1.1 泊松分布的由来

如图 1 所示, 试用数轴上的区间代表时间的长短^[7]。

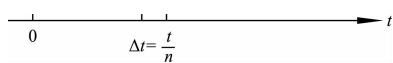


图 1 时间坐标轴

假定: 1) 在单位区间上船舶到港数量是随机的, 记为 λ , λ 和到港船数及其频率有关; 2) 不

同时段 t 的到港船数彼此相互独立。

现取时间数轴上一段时间 t , 将其 n 等分为 $\Delta t = \frac{t}{n}$, 则 $\lambda \cdot \Delta t = \lambda \frac{t}{n}$ 为船舶在 Δt 时段内到港的频率。在 Δt 时段有船到港的频率记为 $p = \frac{\lambda t}{n}$,

无船到港频率记为 $q = 1 - p = 1 - \frac{\lambda t}{n}$, 仅此 2 种可能性, 即要么为 p , 要么为 $q = 1 - p$, 相当于伯努利 (Bernoulli) 试验, 是一个典型的二项分布问题。于是在时间 t 内, 有 K 艘船到港的概率可以表示为二项分布:

$$P_n(K) = C_n^K p^K q^{n-K} = C_n^K \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^K \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-K} \quad (1)$$

将其作如下变化

$$\begin{aligned} P_n(K) &= \frac{A_n^K}{K!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^K \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-K} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-K+1)}{n^K} \frac{(\lambda t)^K}{K!} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-K} = \\ &= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{K-1}{n}\right) \frac{(\lambda t)^K}{K!} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-K} \end{aligned} \quad (2)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $n \rightarrow \infty$, 此时对离散型的二项分布取极限, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(K) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda t)^K}{K!} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda t)^K}{K!} \left[1 + \left(-\frac{\lambda t}{n}\right)\right]^{-\frac{n}{\lambda t}} \end{aligned} \quad (3)$$

令 $\frac{1}{N} = -\frac{\lambda t}{n}$, 或 $N = -\frac{n}{\lambda t}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 亦有

$N \rightarrow \infty$, 于是

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_n(K) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\lambda t)^K}{K!} \left[1 + \frac{1}{N}\right]^{-N} = \frac{(\lambda t)^K}{K!} e^{-\lambda t} \quad (4)$$

[注: $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e$]

上述演算表明, 当 n 很大时, 即 $\frac{\lambda t}{n}$ 很小时二项分布可转化为泊松分布, 如下式所示:

$$P_n(K) = C_n^K p^K q^{n-K} = C_n^K \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^K \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-K} \approx \frac{(\lambda t)^K e^{-\lambda t}}{K!} \quad (5)$$

当 t 取 1 a 中的每一天, 则上式变为只依赖于

常数 λ 的概率分布函数 P_n , 即

$$P_n(K) = \frac{\lambda^K e^{-\lambda}}{K!} \quad (6)$$

由上述分析不难得出结论: 船舶到港的分布律服从二项分布, 其数学物理意义明确, 符合船舶到港分布的“客观规律”, 而泊松分布只是二项分布的一种近似。正如文献[5]所说, “对某些计算来讲, 泊松分布律可以认为是二项分布律的一种方便的近似。然而, 其更重要的作用却出于它是二项律的连续的类似。”

应指出的是, 到港船舶服从泊松分布, 还可以根据“离散型的随机过程”直接导出, 限于篇幅, 在此不作推演。

1.2 泊松分布的特征

泊松分布为离散型随机变量的概率分布, 描述的是在某一时间间隔中, 随机事件发生的个数的概率, 为概率论中的一种重要分布, 且仅有一个参数 λ , 计算方便, 用途较广。除交通运输行业外, 如电话总机在某段时间接到用户呼唤的次数、数字通讯中的误码数、大批产品中的次品数等都服从泊松分布, 这缘于泊松分布极相似于正态分布^[5], 这在图2中也可得到印证。根据中心极限定理可知, 正态分布用途广泛, 如此不难理解泊松分布应用较广的道理。

由于泊松分布为离散型的概率分布, 所以数学期望为:

$$EP(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} \right) \quad (7)$$

式中括号内的和为 e^λ 的马克劳林 (Maclaurin) 级数, 即等于 e^λ , 所以

$$EP(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda \quad (8)$$

由此可知, λ 为泊松分布的数学期望, 其实际意义为1a中平均每天到港的船数。

λ 为随机变量, 其变化周期为1a, 对于一个港口而言, 在1a中 λ 是一个常数, 这个常数取决于1a中来港的船数 n 及其出现的频率 p , 即 $\lambda = np$ 。

1.3 泊松律使用条件

文献[8]已证明, 当 $n \geq 10$ 和 $p \leq 0.1$ 时, 便可以用泊松分布代替二项分布的近似计算。在表1中, $n=20$ 时, $p=0.2209$; $n=11$ 时, $p=0.4016$, 显然两种情况不能同时满足 $n \geq 10$ 和 $p \leq 0.1$ 的条件, 因此, 两个分布差值较大。事实上, 到港船舶的数量 n 远大于10, 其相应的频率 p 远小于0.1, 通常所说, 到港船舶服从泊松分布, 在实际应用上是合理而又可行的。

1.4 两种分布对同一问题计算过程的比较

二项分布的通式为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (9)$$

泊松分布的通式为

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (10)$$

其中 k 为1d到港的船数, 一般在20艘以下, n 却是很大, 通常为几十艘到几百艘, e 为自然对数的底。 $e^{-\lambda}$ 对于一个港口而言, 是一个常数。在表1中, 当 $k=3, n=189, p=0.0234, \lambda=4.418$ 时, 分别代入两式中, 二项分布:

$$P_n(3) = C_{189}^3 \times 0.0234^3 \times (1-0.0234)^{189-3} = 17.35\%,$$

泊松分布:

$$P_n(3) = \frac{4.418^3 \times 2.71828^{-4.418}}{3!} = 17.33\%。$$

二项分布中的阶乘和乘幂的计算, 用手持的普通计算器很难实现计算, 必须借助电脑(科学计算器)方可完成计算, 而泊松分布中的计算式只需一般的手持计算器便可简便、迅速地计算。可见, 二项分布如用泊松分布替代, 可以将一个繁琐的计算过程转化为一个简捷方便的计算过程, 达到简化计算、节省时间、提高效率的目的。

1.5 二项分布和泊松分布的区别及统一

对于一个事物或一个过程, 如用数学语言来描述时, 一般可以有不同的方式或方法。以到港船舶的分布律而言, 就可用二项分布和泊松分布来表达, 但两者又有所区别。在表1中当来港船舶数较少时, 用二项分布计算所得的概率小于用泊松分布

计算所得的概率。这是因为“较少船舶”到港是个小概率事件,即到港船数少,所对应的概率小,用二项分布可以得到很好的解释,概念清楚,符合规律。而在泊松分布中,数学期望 $\lambda = np$, λ 在 1 a 中是个常数,当船数 n 很小时,频率 p 则较大,这和小概率事件不符,即泊松分布不能很好予以解释。因此,来港船舶数较少时用二项分布比较合理、方便。当

来港船舶数较多,在满足 1.3 节的条件后,可以转而计算泊松分布来替代二项分布以简化计算。

2 实例验证

为了比较二项律和泊松律对同一问题计算结果的一致性,现举一实例^[9],予以验证,见表 1。

表 1 某港到港船舶分布律的计算结果

日到港船数 $K/(艘 \cdot d^{-1})$	出现天数/ d	到港船数 $n/艘$	日平均到船率 $\lambda/(艘 \cdot d^{-1})$	二项分布律 $P(\lambda/n)$	$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ($k=0,1,2,\dots,11$) $P_n/\%$	泊松分布 $P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ ($k=0,1,2,\dots,11$) $P_n/\%$
0	7	0		0	0	1.21
1	20	20		0.220 9	3.85	5.33
2	44	88		0.050 2	11.50	11.77
3	63	189		0.023 4	17.35	17.33
4	72	288		0.015 3	19.27	19.14
5	54	270	4.418	0.016 4	17.05	16.91
6	42	252		0.017 5	12.50	12.45
7	32	224		0.019 7	7.84	7.86
8	14	112		0.039 4	4.22	4.34
9	7	63		0.070 1	1.91	2.13
10	10	100		0.044 2	0.84	0.94
11	1	11		0.401 6	0.004 4	0.38
Σ	366(1980 润年)	1 617				

由表 1 可见,当 $n > 20$ 时,两种分布律的计算结果极为接近,两种分布曲线几乎重合(图 2)。

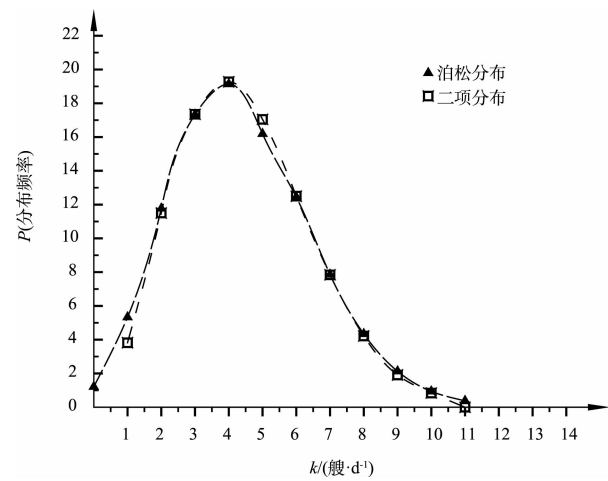


图 2 两种分布律曲线

3 合理泊位数的计算

3.1 合理泊位数的判定式

设港口有 S 个泊位,港口和船舶平均每天发生的总费用为

$$Q_s = C_b S + C_s \bar{n}_s \tag{11}$$

式中: C_b 为每个泊位每天所需费用(包括基建、维修、管理费),为常量; C_s 为每船每天驻港费用(包括装卸、待泊费用),为常量; \bar{n}_s 为当泊位为 S 个时,平均每天在港的船数,随 S 而变化; Q_s 为随 S 和 \bar{n}_s 变化的函数(总费用)。

规划目标函数为

$$\min Q_{s_0} = C_b S_0 + C_s \bar{n}_{s_0} \tag{12}$$

式中: S_0 为合理泊位数。

约束条件为:

$$Q_{s_0} < Q_{s_0-1} \tag{13}$$

$$Q_{s_0} < Q_{s_0+1} \tag{14}$$

Q_{s_0-1} 和 Q_{s_0+1} 分别为 $(S_0 - 1)$ 和 $(S_0 + 1)$ 个泊位时的总费用。

式(12)代入式(13)得:

$$C_b/C_s < \bar{n}_{s_0-1} - \bar{n}_{s_0} \tag{15}$$

式(12)代入式(14)得:

$$C_b/C_s > \bar{n}_{s_0} - \bar{n}_{s_0+1} \quad (16)$$

综合上面二式, 得:

$$\bar{n}_{s_0-1} - \bar{n}_{s_0} > C_b/C_s > \bar{n}_{s_0} - \bar{n}_{s_0+1} \quad (17)$$

式(17)即为合理泊位数的判定式, 式中 S_0 为合理泊位数或最优泊位数, 其物理意义是, 当港方和船方的费用一定, 泊位数减少一个或者增加一个时, 发生的在港船数的变化与费用比的数量关系。

3.2 排队论模型^[5-6, 10]

3.2.1 模型使用条件^[10]

条件1, 进港船舶近似服从泊松分布

$$P_n(K) = \frac{\lambda^K e^{-\lambda}}{K!} \quad (18)$$

条件2, 船舶占用泊位装卸时间服从负指数分布

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (19)$$

或服从爱尔兰 (A. K. Erlang) 分布:

$$f(t) = \frac{K\mu(K\mu t)^{K-1}}{(K-1)!} e^{-K\mu t} \quad (20)$$

式中: μ 为日平均装卸船效率 (艘/d); K 为爱尔兰分布函数的阶, 当 $K=1$ 时, 即变为负指数分布。

3.2.2 排队论方法的模型^[10]

模型的一般形式为 $M/E_k/S$, 其中 M 为船舶到港数, 服从泊松分布; E_k 为船舶占用泊位时间, 服从 K 阶爱尔兰分布; S 为泊位数。

当 $K \rightarrow \infty$ 时, 爱尔兰分布变为定长分布, 记作 $M/D/S$; 当 $K=1$ 时, 爱尔兰分布变为负指数分布, 记作 $M/M/S$; 当 $K=2$ 时, 爱尔兰分布函数变为 $E_2 = 4\mu^2 t e^{-2\mu t}$, 记作 $M/E_2/S$ 。不同的排队论模型通过其表达函数均已制成不同的数表, 供计算查用。本文只采用 $M/M/S$ 模型作为示例。

3.3 模型的应用

由式(17)可知, 合理泊位数的判断是通过平均在港的船数来进行的, 平均在港的船数 \bar{n}_s 包括

平均靠泊作业的船数 \bar{n}_{bs} 和平均待泊的船数 \bar{n}_{ws} , 两种船舶数的计算分析如下。

1) 平均靠泊作业的船数 \bar{n}_{bs} 。

决定泊位数的关键在于港口的吞吐量 Q :

$$Q = RSN\rho_s \quad (21)$$

式中: Q 为年吞吐量 (t); R 为一个泊位的日平均装卸效率 (t/d), 即船吨量; S 为泊位数; N 为营运期 (d); ρ_s 为泊位数为 S 的泊位利用率。

式(21)变形为:

$$\frac{Q}{RN} = S\rho_s \quad (22)$$

其中 $\frac{Q}{RN}$ 可以理解为一个泊位的日吞吐量, 定义为船流密度, 以 a 表示, 则有 $a = \frac{Q}{RN} = S\rho_s$ 或 $\rho_s = \frac{a}{S}$, $S\rho_s$ 为被利用的泊位数, 数值上等于靠泊码头作业的船数, 即 $S\rho_s = \bar{n}_{bs}$ 。于是, $S\rho_s = \bar{n}_{bs} = a$ 。

2) 平均待泊的船数 \bar{n}_{ws} ^[10]。

$$\bar{n}_{ws} = T_w \lambda \quad (23)$$

$$\lambda = \frac{Q}{NG} \quad (24)$$

$$T_w = \frac{a^S}{(S-1)! (S-a)^2} T_b P_{0s} \quad (25)$$

$$\frac{T_w}{T_b} = \frac{a^S}{(S-1)! (S-a)^2} P_{0s} \quad (26)$$

$$P_{0s} = \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^S}{(S-1)! (S-a)!} \right]^{-1} \quad (27)$$

$$T_b = \frac{G}{R} \quad (28)$$

式中: λ 为日平均到船率 (艘/d); T_w 为船舶平均待泊时间 (d); T_b 为船舶平均靠泊 (装卸) 时间 (d); P_{0s} 为无船在港的概率; G 为本港船舶的平均装卸量 (t/艘)。式(26)已制成相应的附表, 供计算查用。平均在港船数的计算过程 (步骤) 见图3。

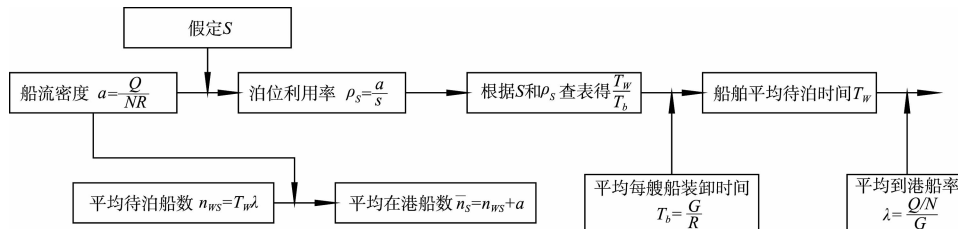


图3 在港船数计算步骤

3.4 算例

已知某港 3 a 后可增加件杂货吞吐量 $Q = 120$ 万 t。船舶到港符合泊松分布，占用泊位时间基本符合负指数分布。一个泊位日平均装卸量 $R = 2\ 000$ t/d，本港船舶平均的装卸量 $G = 5\ 000$ t/艘， $C_b = 2.10$ 万元/（日·泊位）， $C_s = 8.8$ 万元/（日·艘）。试确定 3 a 后应增加件杂货码头泊位数。

根据以上条件，符合 $M/M/S$ 模型，据上述计算步骤进行计算，根据 JTJ 211—1999 《海港总平面设计规范》^[1] 5.8.5 条，件杂货泊位的利用率 $\rho_s = 0.55 \sim 0.75$ ，已知 $a = \frac{Q}{NR} = 1.71$ ， $\rho_s = \frac{a}{S}$ 可见 S 最小在 3 以上，故假定 $S = 3, 4, 5$ ， N 取 365 d，进行试算，结果见表 2。

表 2 $M/M/S$ 模型计算结果

S	ρ_s	T_w/d	$\bar{n}_{ws}/(\text{艘}\cdot\text{d}^{-1})$	$\bar{n}_s/(\text{艘}\cdot\text{d}^{-1})$	$\bar{n}_s - \bar{n}_{s-1}$	C_b/C_s
3	0.55	0.54	0.36	2.00		
4	0.41	0.10	0.07	1.71	0.29	0.24
5	0.33	0.02	0.01	1.65	0.06	

注：限于篇幅 $M/M/S$ 数表未列出，可参考文献[10]或相关文献。

由表 2 可知， $\bar{n}_3 - \bar{n}_4 = 0.29$ ， $\bar{n}_4 - \bar{n}_5 = 0.06$ ， $C_b/C_s = 0.24$ ，即 $\bar{n}_3 - \bar{n}_4 > C_b/C_s > \bar{n}_4 - \bar{n}_5$ 符合式 (17)，因此，3 a 后增加 4 个件杂货泊位比较合理。

4 结语

1) 通过概率的分析、论证，船舶到港分布的“客观规律”服从二项分布，其数学物理意义明确，概念清晰。当来港船舶数量 n 足够大，二项分布已等价于泊松分布，即此时船舶到港服从泊松分布，考虑到计算便捷，通常采用泊松分布计算，其结果已足够精确。

2) 事实上，到港船舶近似服从泊松分布，还可以通过“离散型的随机过程”予以推导，篇幅所限，没作推演。

3) 合理泊位数的确定，不可以仅用简化了的数学定量计算予以解决，因为，如前所述，影响泊位数的因素复杂，如来自社会、人文、经济、自然等各种因素的动态作用，不仅港口之间的差异明显，即使港口自身随时间的变化也不尽相同。但定量计算目前在港口规划中仍具有积极的决策作用，一个好的规划不仅有量化指标，同时也应是各种因素综合作用的结果。

4) 在合理泊位数判定式(17)中， C_b/C_s 是连接前后 3 种船数之差，并起到桥梁和控制作用的关键指标，是一个动态的经济指标，可见，所谓合理泊位数具有相对性，将随着经济动态指标的变化而变化。

参考文献：

- [1] JTJ 211—1999 海港总平面设计规范[S]: 47-58.
- [2] 交通部水运工程科技情报站. 发展中国家港口规划手册[R]. 北京: 交通部水运工程科技情报站, 1978: 117-125, 228-236.
- [3] 张滨海, 石迈. 关于确定港口泊位数的几种方法[J]. 水运工程, 1981(9): 14-17.
- [4] 张一诺. 港口通用泊位最佳数量的计算方法[J]. 水运工程, 1982(1): 6-9.
- [5] (美) 罗伯特·M·斯塔克, 罗伯特·L·尼克尔斯. 设计数学基础[M]. 四川省交通局勘察设计院技术情报室, 译. 北京: 人民交通出版社, 1980: 187-190, 274-284.
- [6] 胡运权. 运筹学基础及应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2011: 66-76.
- [7] 林少宫. 基础概率与数理统计[M]. 北京: 人民教育出版社, 1963: 55-64.
- [8] 浙江大学数学系高等数学教研组. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979: 40-49.
- [9] 赵智邦, 江印庭. 用排队论推算港口最佳泊位数[J]. 水运工程, 1982(2): 10-11.
- [10] 郭子坚. 港口规划与布置[M]. 北京: 人民交通出版社, 2011: 66-76.

(本文编辑 武亚庆)