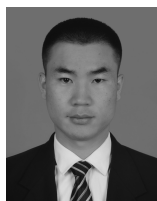


· 综 合 ·

# 自适应网格下的近岸波浪缓坡方程数值模型\*



孟祥宇<sup>1</sup>, 唐军<sup>1</sup>, 李巧生<sup>2</sup>

(1. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2. 江苏省苏州市航道管理处, 江苏 苏州 215008)

**摘要:** 在近岸变水深缓坡海域, 充分考虑到波浪传播过程中的折射、绕射、反射以及波浪破碎等效应, 采用引入破碎项的椭圆型缓坡方程, 基于自适应四叉树网格建立了近岸波浪缓坡方程的数值模型, 数值模型采用有限体积法求解。该网格可根据计算节点处波长与网格尺寸间的关系自动判定是否进行网格加密划分, 使之适应椭圆型缓坡方程每个波长范围内至少布置8个计算节点的特征, 提高计算精度的同时又能提高计算效率。采用已有的物理模型试验和实测资料对数值模型进行了验证。结果表明, 该模型可以有效地模拟近岸变水深缓坡海域波浪传播。

**关键词:** 数值模拟; 缓坡方程; 四叉树; 有限体积法

中图分类号: U 656.3; TV 139.2

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2017)01-0020-06

## Near-shore waves elliptic mild-slope equation model under adaptive grid

MENG Xiang-yu<sup>1</sup>, TANG Jun<sup>1</sup>, LI Qiao-sheng<sup>2</sup>

(1.State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2.Suzhou Waterways Management Division, Suzhou 215008, China)

**Abstract:** The water waves were numerically studied by the elliptic mild-slope equation which introduced wave-breaking effect and considered the refraction, diffraction and reflection on the near-shore mild-slope coastal. Under a automatic quad-tree grid system, the numerical model was solved by finite volume method. The primary grid would be divided if the local wavelength is smaller-than-eightfold grid width to insure the accuracy of the elliptic mild-slope equation. The numerical results were compared with physical experiment data and the field measurement data, and the results showed that the numerical model has preferable adaptation to near-shore complex zones.

**Keywords:** numerical simulate; mild-slop equation; quad-tree; finite volum method

波浪从深海向近岸传播的过程中, 由于水深变浅和地形的不均匀变化等复杂因素, 会导致近岸波浪的折射、反射、绕射和波浪破碎等物理现象。准确预测近岸波浪传播特性是海岸及近海工程开发的基础。

目前, 缓坡方程和 Boussinesq 方程被普遍应用

于近海海域的波浪传播数值模拟中。同 Boussinesq 方程相比, 缓坡方程具有很宽的波浪频率和水深适用范围。且对于大范围、长距离传播的波浪, 应用 Boussinesq 方程易导致计算失真<sup>[1]</sup>。缓坡方程最早由 Berkhoff<sup>[2]</sup> 提出, 可以充分考虑到波浪传播过程中的折射、反射和绕射等效应。之后很多学

收稿日期: 2016-04-27

\*基金项目: 国家自然科学基金项目 (51579036, 51579030); 国家重点基础研究发展计划资助项目 (2013CB430403)

作者简介: 孟祥宇 (1990—), 男, 硕士, 从事近岸波流场数值研究。

者针对原始缓坡方程加以改进, 进一步添加了色散、摩擦、破碎等效应, 并分别采用不同数值算法对其进行了数值求解。如 Tang 和 Shen 等<sup>[3]</sup>采用 GPBiCG( $m, n$ ) 算法对经有限差分法离散的椭圆型缓坡方程进行了求解。喻天罡等<sup>[4]</sup>采用了一种改进的有限元方法对近岸波浪折射-绕射-破波耗散进行了数值模拟, 并应用到一个模型港湾。近年来, 有限体积法也逐渐被引入到缓坡方程的离散求解<sup>[5]</sup>。相对于有限差分法和有限单元法, 有限体积法离散的方程能够描述有限各控制体物理量的守恒性, 该方法适用于任何类型的单元网格, 更便于应用来模拟具有复杂边界区域的流体运动。对近岸波浪场采用有限体积法模拟时, 为适应复杂边界的不规则性, 多在非结构化网格下对控制方程进行离散求解。但一般采用非结构化网格在离散模型的过程中往往要引入形函数而产生复杂的交叉项, 从而增加了方程的复杂程度, 降低了求解的效率和精度。

本文在一种自适应四叉树网格下对缓坡方程采用有限体积法离散求解。该网格不仅能够很好地模拟复杂的边界, 而且在计算边界通量时无需引入形函数, 不会产生复杂的交叉项, 同时可根据计算节点处的波长与网格尺寸之间的关系自动判定是否进行网格的加密划分, 能较好拟合复杂区域、提高计算精度、节省计算时间。将模拟计算结果与物理模型试验结果和实测数据进行对比分析, 结果表明本文模型可以很好地模拟近岸复杂海域的波浪场。

## 1 数值模型

### 1.1 近岸波浪椭圆型缓坡方程

波浪在近岸缓变地形区域传播过程中会发生折射、反射及绕射等物理现象。针对近岸波浪的这些特性, Berkhoff 提出了综合考虑波浪折射、绕射、反射等特性的椭圆型缓坡方程。考虑波浪传播破碎效应的椭圆型缓坡方程可表示为:

$$\nabla(CC_g \nabla \phi) + k^2 CC_g \phi + i\omega \frac{D_b}{E} \phi = 0 \quad (1)$$

其中:

$$\phi = -\frac{ig}{\omega} \eta' \quad (2)$$

$$D_b = \frac{KC_g}{h} (E - E_s) \quad (3)$$

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (4)$$

式中:  $C$  为波浪传播相速度;  $C_g$  为群速;  $\phi$  为波浪势函数;  $i$  为虚数单位;  $g$  为重力加速度;  $\omega$  为角频率;  $\eta'$  为复波面升高;  $k$  为波数;  $D_b$  为波浪破碎的能量损失;  $K \approx 0.15$  为经验系数;  $h$  为当地静水深;  $\rho$  为水密度;  $H$  为波高;  $E_s$  为  $0.4h$  水深以下的稳定波能。

波浪由深水向近岸浅水传播的过程中, 由于水深变浅、能量汇聚, 波高相对于水深不断增大, 增大到一定程度后波浪通常会发生破碎。一般近岸浅水区的破碎波高  $H_b$  可由下式简单确定:

$$H_b = \gamma_b h \quad (5)$$

式中:  $\gamma_b$  为波浪破碎指标, 根据当地地形确定, 一般取  $0.6 \sim 0.8$ ;  $h$  为当地水深。

### 1.2 椭圆型缓坡方程的数值离散

在一种自动加密的四叉树网格下对模型采用有限体积法离散求解。该网格系统不仅可以较好地适应复杂计算域, 而且可以节省计算存储空间和计算时间。根据计算点处网格尺寸与计算波长的关系来判定是否进一步细划网格, 若波长小于计算方向上的网格宽度的 8 倍, 则自动划分网格为 4 个二级网格; 若大于, 则不用划分。

在自适应四叉树网格下, 采用有限体积法对控制方程进行数值离散求解<sup>[6]</sup>。以每个网格单元为控制体, 计算节点布置在每个控制体的中心上, 对式(1)积分可得:

$$\iint_A \nabla(CC_g \nabla \phi) dA + \iint_A k^2 CC_g \phi dA + \iint_A i\omega \frac{D_b}{E} \phi dA = 0 \quad (6)$$

运用格林公式将式(6)中的第一项转化为线积分:

$$\iint_A \nabla(CC_g \nabla \phi) dA = \oint_l (CC_g \nabla \phi) \mathbf{S} dl \quad (7)$$

进一步将式(7)写成求和的形式:

$$\oint_l (CC_g \nabla \phi)_f \mathbf{S}_f dl = \sum_{f=1}^n (CC_g \nabla \phi)_f \mathbf{S}_f \quad (8)$$

式中： $A$ 为控制单元体的表面面积； $l$ 为控制体网格边界线； $n$ 为控制体网格界面总个数，对于矩形网格有  $n=n_w+n_s+n_e+n_n$ ， $n_w$ 、 $n_s$ 、 $n_e$ 、 $n_n$  分别为控制体网格的西、南、东、北4个方向上的界面数； $\mathbf{S}_f$ 为控制体到邻居单元体  $f$  边的法向矢量，见图1。

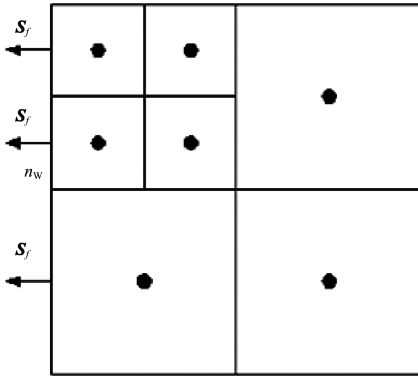


图1 控制体的界面数和法向矢量

式(6)中等号左侧的第2项和第3项，可分别用网格中心的计算节点处变量值来表示：

$$\iint_A k^2 CC_g \phi dA + \iint_A i\omega \frac{D_b}{E} \phi dA = (k^2 CC_g A)_I \phi_I + \left( i\omega \frac{D_b}{E} A \right)_I \phi_I \quad (9)$$

由式(8)和(9)可得控制方程为：

$$\sum_{f=1}^n (CC_g \nabla \phi)_f \mathbf{S}_f + (k^2 CC_g A)_I \phi_I + \left( i\omega \frac{D_b}{E} A \right)_I \phi_I = 0 \quad (10)$$

式中： $\nabla \phi$ 为速度势梯度； $(CC_g)_f$ 为矩形网格各个边界面上的变量值，由界面两侧网格中心计算节点值采用中心差分法插值得到。

在控制体网格通量的计算中，涉及到变量梯度的计算。由于矩形网格形状规则，本文采用简单直观的方向导数法来对控制体网格界面处变量  $\phi$  的梯度进行计算：

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right)_f = (\nabla \phi)_f \mathbf{S}_f \quad (11)$$

式中： $\mathbf{n}$ 为控制体网格边界外法线；速度势梯度  $\nabla \phi$ 可用如下公式表示：

$$\nabla \phi = \frac{\phi_I - \phi_J}{\Delta JI} \quad (12)$$

式中： $I$ 为当前控制单元体； $J$ 为相邻单元体； $\phi_I$ 、 $\phi_J$ 分别为相邻控制单元网格的波浪势函数； $\Delta JI$ 为相邻控制单元网格中心点之间的距离。

对于式(10)等号左侧第1项可进行如下计算：

$$(CC_g \nabla \phi)_f \mathbf{S}_f = (CC_g)_f \left[ \frac{(\phi_J - \phi_I)}{\Delta JI} \right] \mathbf{S}_f = (CC_g)_f (\phi_J - \phi_I)_f \quad (13)$$

进一步整理式(10)，可以得到以当前网格单元  $I$  为控制单元的离散方程的一般形式为：

$$\alpha_I \phi_I + \sum_{f=1}^n \alpha_f \phi_{If} = 0 \quad (14)$$

式中： $\alpha_I$ 、 $\alpha_f$ 为复系数矩阵； $\alpha_f = (CC_g)_f$ ； $\alpha_I = (k^2 CC_g A)_I - \sum_{f=1}^n \alpha_f + \left( i\omega \frac{D_b}{E} A \right)_I$ 。

## 2 模型的验证

### 2.1 LSTF 模型试验波浪的数值模拟

将所建立的波浪传播数值模型应用于 LSTF (large-scale sediment transport facility) 物理模型试验<sup>[7]</sup>。图2为试验港池布置<sup>[8]</sup>，3个波高仪布置在距离初始岸线 18.432 m 处的位置，用来测量入射波高。中间为用混凝土砌成的模型海滩，长、宽分别为 31、21 m，其坡度约为 1:30。

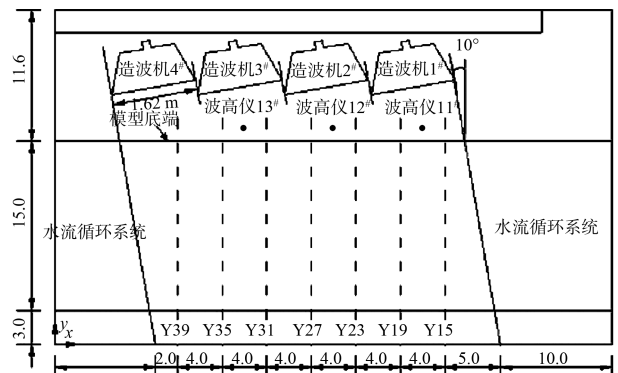


图2 试验港池布置 (单位: m)

模拟计算区域的长和宽分别取 24 和 18.432 m， $x$ 轴方向为沿岸方向， $y$ 轴方向为离岸方向。本文取 2 个计算工况进行模拟验证，入射波浪参数见表 1。

表 1 LSTF 各工况入射波浪参数

工况	波高仪	$H_{m0}/m$	$T_p/s$	$\theta/(^\circ)$
BC-1	11	0.220	1.444	6.5
	12	0.225	1.468	6.5
	13	0.228	1.465	6.5
BC-2	11	0.213	1.439	6.5
	12	0.226	1.469	6.5
	13	0.228	1.460	6.5

根据椭圆型缓坡方程的特点, 每个计算波长范围内至少布置 8 个计算节点才能保证其计算精度。对于一般的均一化网格, 该计算区域至少需要布置 16 383 个长为 0.187 5 m、宽为 0.144 m 的矩形网格才能保证其计算精度, 因为该区域的最小计算波长约为 2 m。在该区域中布置的自适应二叉树网格见图 3。在该网格系统下, 网格类型被自动划分为两种: 一种是靠近岸边的自动划分的二级网格, 其长为 0.187 5 m、宽为 0.144 m; 另一种是远离岸边的未经过划分的一级网格, 其长为 0.375 m、宽为 0.288 m。其是否自动划分, 是由计算节点处网格宽度与波长的关系来确定的。这样布置的网格数量为 5 696 个, 远远小于 16 383, 在保证计算精度的同时还能够提高计算效率。

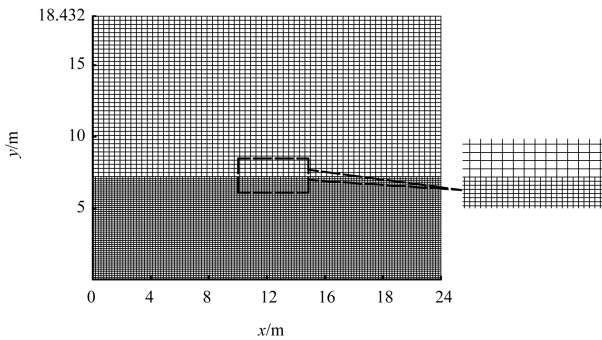
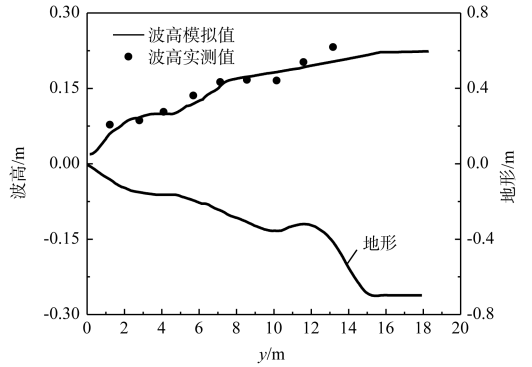


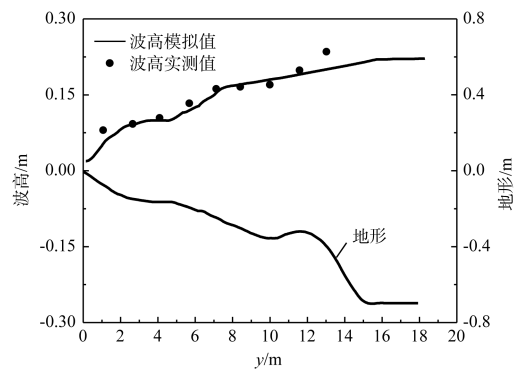
图 3 LSTF 数值模拟二叉树网格布置

当波浪沿着斜向方向由水深较深处向着水深较浅处传播时, 随着水深的减小, 波浪能量不断积聚, 波高随之不断增大, 以至波浪发生破碎。破碎后波能急剧耗散, 波高随之减小。图 4 给出了两种工况条件下数值模拟结果和试验结果比较。在两种工况条件下, 波浪传播至离岸 15 m 左右时都开始发生破碎, 这与地形坡度在离岸 15 m 处的模型沙坝有关。之后, 随着水深的变浅, 波

高值逐渐减小。从波高的模拟值与实测值的对比可以看出, 本文所建立的波浪传播数值模型能够较好地模拟再现该试验中波浪由深水向浅水传播中的波高分布。



a) 工况BC-1



b) 工况BC-2

图 4 LSTF 试验波高模拟值与实测值的比较

## 2.2 美国 Duck 海滩波浪传播的模拟

将所建立的波浪传播数值模型应用于美国北卡罗莱纳州的 Duck 海滩。Miller<sup>[9]</sup> 在该海滩进行多次实地测量试验, 该处海滩有一个长 560 m 的码头引桥伸入向海侧, 在沿着引桥的方向上依附着引桥布置一系列的测量系统 (field research facility) 进行实地数据的测量。本文取沿着引桥方向从水深为零处到引桥向海侧端点的 480 m 为模拟计算的宽度, 取以引桥为中线的 600 m 为模拟计算的长度, 并且以沿岸方向为 x 轴方向、离岸方向为 y 轴方向, 主要对引桥附近的波高进行数值模拟, 模拟区域的地形水深<sup>[10]</sup> 见图 5, 引桥布置在  $x = 300$  m 处, 引桥附近水深相对旁边水深较大。

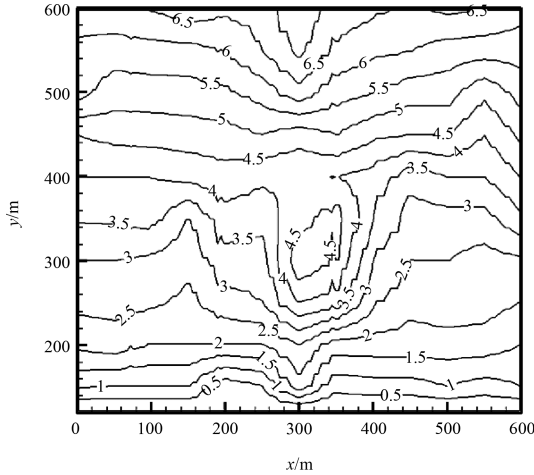


图5 Duck 海滩模拟区域的地形水深 (单位: m)

波浪与岸线以一定的夹角入射, 相关波浪入射参数<sup>[11]</sup>见表2。表中所列参数值均为测量一段时间后所取的平均值, 并且对于本文中未涉及的因素没有列出。

表2 各工况波浪参数

日期	$H_{m0}/m$	$T_p/s$	$\theta/(^\circ)$
1997-04-01	2.91 (2.80~3.07)	10.15 (9.09~11.11)	21.0 (17.0~24.0)
1998-02-04	3.54 (3.10~3.98)	10.80 (10.53~11.11)	14.0 (10.0~17.0)

本次模拟计算区域较大, 如果布置较大尺寸的网格, 会影响计算精度; 但如果网格尺寸较小, 又会大大减小计算效率。例如长、宽分别为 4.687 5、3.75 m 的网格, 需要布置 16 383 个。而在自适应二叉树网格下, 只需要布置 5 632 个网格, 网格布置见图6, 一级网格长和宽分别为 9.375 和 7.5 m, 二级网格长和宽分别为 4.687 5 和 3.75 m。

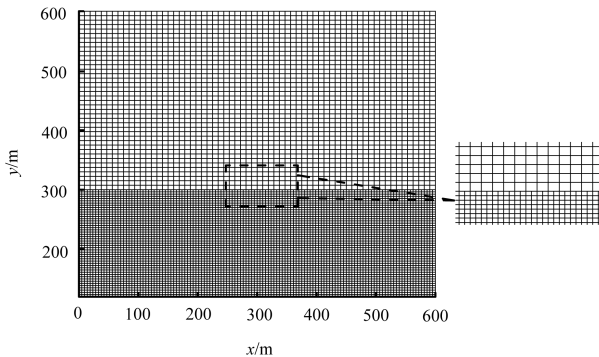
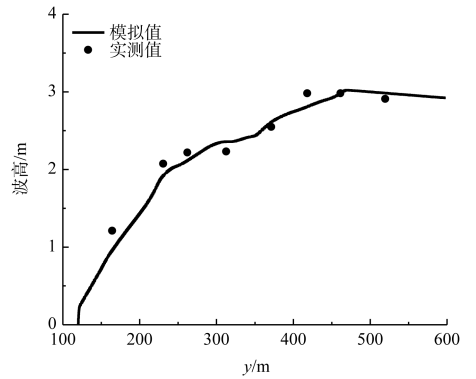
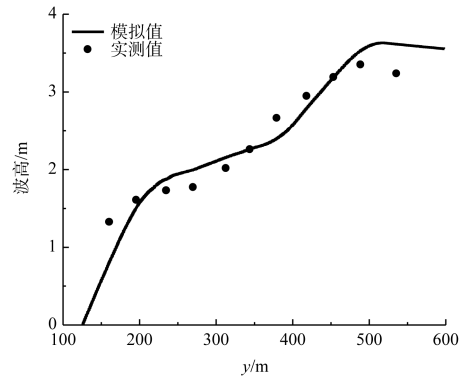


图6 Duck 海滩数值模拟二叉树网格的布置

在此网格系统下, 根据表2所示波浪入射参数, 对 Duck 海滩的近岸波浪进行数值模拟, 模拟结果见图7。图7a)中的波高较小, 波浪传播至离岸450 m处开始发生破碎, 模拟值与实测值相差不大。图7b)中的波高较大, 波浪传播至离岸500 m处开始发生破碎, 在破碎之前, 模拟值稍大于实测值; 破碎发生之后, 模拟值与实测值相差不大。



a) 1997-04-01



b) 1998-02-04

图7 Duck 海滩波高数值模拟值与实测值比较

图8给出了两种工况模拟的波高等值线, 从图8可以看出波高随着水深变浅不断减小的过程, 并且随着波浪的传播, 波高等值线趋于与地形等深线平行。从波高的模拟值与实测值的对比可以看出, 本文所建立的波浪传播数值模型能够较好地模拟近岸波浪传播, 而本文提出的自适应二叉树网格也能很好地应用于该模型。

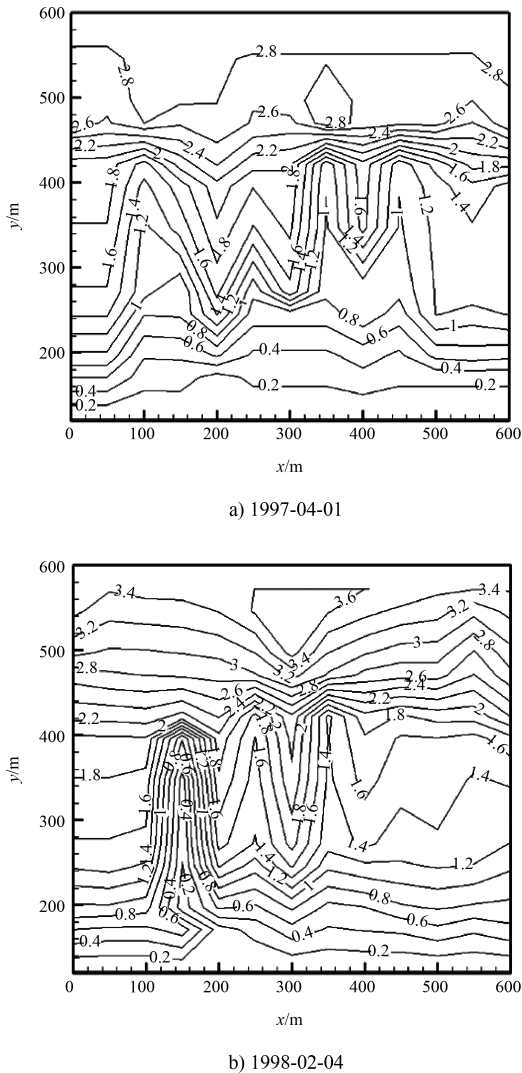


图8 Duck 海滩两种工况的波高等值线 (单位: m)

### 3 结论

1) 本文基于自适应二叉树网格建立了近岸波浪的椭圆型缓坡方程数值模型。根据计算点处的波长与网格尺寸的关系, 自动划分网格大小, 使其满足椭圆型缓坡方程的计算精度, 同时提升计算效率。

2) 在该网格系统下, 采用有限体积法对模型进行数值离散求解。

3) 将所建模型应用于 LSTF 物理模型试验和 Duck 海滩实地测量试验, 并采用数值模拟结果与物理模型试验结果和实地测量数据进行对比分析, 对

模型的正确性和适用性进行验证, 结果表明, 该模型可以有效地模拟近岸变水深缓坡海域的波浪传播。

### 参考文献:

- [1] 张扬, 李瑞杰, 张素香, 等. 缓坡方程与 Boussinesq 方程特征的分析比较[J]. 海洋湖沼通报, 2005(2): 1-7.
- [2] BERKHOFF J C W. Computation of combined refraction-diffraction [C]. International Conference on Coastal Engineering, 1972: 471-490.
- [3] TANG J, SHEN Y, ZHENG Y, et al. An efficient and flexible computational model for solving the mild slope equation[J]. Coastal engineering, 2004, 51(2): 143-154.
- [4] 喻天罡, 管长龙. 近岸波浪折射-绕射-破波耗散联合模式的有限元数值研究[J]. 青岛海洋大学学报: 自然科学版, 2000, 30(1): 15-21.
- [5] 魏美芳, 唐军, 沈永明. 非结构化网格下椭圆型缓坡方程的数值求解[J]. 海洋学报, 2009, 31(2): 159-164.
- [6] 李巧生. 基于二叉树网格的近岸波浪及波生流数值模型[D]. 大连: 大连理工大学, 2013.
- [7] HAMILTON D G, EBERSOLE B A. Establishing uniform longshore currents in a large-scale sediment transport facility[J]. Coastal engineering, 2001, 42(3): 199-218.
- [8] NAM P T, LARSON M, Hanson H. A numerical model of nearshore waves, currents, and sediment transport [J]. Coastal engineering, 2009, 56(11): 1 084-1 096.
- [9] MILLER H C. Comparison of storm longshore transport rates to predictions [C]//Proceedings of 26 th Coastal Engineering Conference. USA: ASCE Press, 1998: 2 954-2 967.
- [10] MILLER H C. The sensor insertion system, an installation alternative at Duck, NC, USA [J]. Coastal engineering journal, 2011, 42(3): 273-294.
- [11] KURIYAMA Y, SAKAMOTO H. Cross-shore distribution of long-term average longshore sediment transport rate on a sandy beach exposed to waves with various directionalities[J]. Coastal engineering, 2014, 86: 27-35.

(本文编辑 武亚庆)