



# 等效内摩擦角计算方法及其应用

周旋

(中交第三航务工程勘察设计院有限公司, 上海 200032)

**摘要:** 挡土墙的应用环境复杂, 合理计算土压力就变得极为重要。针对黏性土土压力计算, 朗肯土压力理论不考虑土体与墙壁间的摩擦力, 库伦土压力理论只能计算非黏性土, 为了综合考虑摩擦力及粘聚力的影响, 提出等效内摩擦角的理论。列出常用的3种等效内摩擦角的计算方法, 并经分析选择相对最合理的计算方法。在此基础上, 考虑墙后均载和水位, 推导出新的等效内摩擦角计算公式, 使等效内摩擦角能应用于更多复杂的环境中。

**关键词:** 等效内摩擦角; 挡土墙; 土压力

中图分类号: TU 47; U 65

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2016)07-0022-04

## Calculation method for equivalent internal friction angle & its application

ZHOU Xuan

(CCCC Third Harbor Consultants Co., Ltd., Shanghai 200032, China)

**Abstract:** As the application environment of retaining wall is complex, it becomes important to calculate the soil pressure reasonably. About the calculation to the soil pressure of clay, Rankine's theory about soil pressure does not consider the friction between soil mass and retaining wall, and Coulomb's theory about soil pressure can only be used to calculate the non-cohesive soil. In order to consider the effect of friction and cohesion, the theory about equivalent internal friction angle was put forward. Three kinds of calculation methods were listed to calculate the equivalent internal friction angle, and the most reasonable calculation method was chosen through analysis. On this basis, a new calculation formula for equivalent internal friction angle was proposed by considering uniform load and water level behind the wall.

**Keywords:** equivalent internal friction angle; retaining wall; soil pressure

挡土墙的应用环境复杂、形式较多, 导致挡土墙的设计计算困难。为确保挡土墙的安全, 在挡土墙的设计计算中, 必须合理确定墙后填料的内摩擦角 $\varphi$ 、粘聚力 $c$ 、填料与墙背的摩擦角 $\delta$ 以及结构的断面形式。在设计挡土墙时, 通常采用朗肯土压力理论和库伦土压力理论。朗肯土压力理论假定土体与墙壁之间无摩擦力( $\delta=0$ ), 而库伦土压力假定土体为理想散体, 只有摩擦力而无粘聚力。当墙后填料为非黏性土时, 直接采用相关理论公式计算。但在实际工程中, 经常碰到墙后填料为黏性土, 粘聚力对土压力有相当大的影

响, 不可忽视其作用, 同时又要计及墙壁摩擦力的客观存在, 因此不少学者提出黏性土的等效内摩擦角的公式, 将朗肯土压力和库伦土压力理论结合起来, 以朗肯土压力理论求等效内摩擦角 $\varphi_d$ , 然后将 $\varphi_d$ 代入库伦土压力理论公式中计算土压力<sup>[1-6]</sup>。

由于朗肯土压力不考虑土体与墙壁的摩擦力, 因此采用朗肯土压力公式计算等效内摩擦角会使挡土墙设计计算偏于保守, 对工程结构是有利的。同时朗肯土压力公式简洁、便于应用, 在工程上得到了广泛应用。

收稿日期: 2016-03-02

作者简介: 周旋(1989—), 男, 硕士, 从事港口工程及水利工程设计工作。

填土的粘聚力折算成等效内摩擦角  $\varphi_d$ , 公式如下:

$$\varphi_d = \varphi + \Delta\varphi \quad (1)$$

式中:  $\varphi$  为填料内摩擦角;  $\Delta\varphi$  为将填土的粘聚力折算成内摩擦角的增量。

对于一般黏性土, 地下水位以上等效内摩擦角一般可取  $35^\circ$  或者  $30^\circ$ , 地下水位以下则可取  $30^\circ$  或者  $25^\circ$ 。但等效内摩擦角不是一个定值, 随墙高而变化, 因此上述方法确定的等效内摩擦角不能很好地反映实际情况<sup>[4]</sup>。

本文给出了 3 种等效内摩擦角的计算方法, 并选出较合理的计算方法并对其进行拓展。

基本假定为: 1) 墙背垂直、光滑; 2) 填土面水平, 并与墙顶齐高; 3) 土体的粘聚力为  $c$ , 内摩擦角为  $\varphi$ , 当土体破坏时, 不考虑土体变形的影响。

## 1 现有计算方法

### 1.1 按抗剪强度相等条件计算

#### 1.1.1 根据库伦公式

1) 非黏性土的抗剪强度。

$$\tau_f = \sigma \tan \varphi_d \quad (2)$$

2) 黏性土的抗剪强度。

$$\tau_f = \sigma \tan \varphi + c \quad (3)$$

式中:  $\tau_f$  为抗剪强度 (kPa);  $\sigma$  为总应力;  $c$  为土的粘聚力;  $\varphi$  为土的内摩擦角;  $\varphi_d$  为土的等效内摩擦角。

#### 1.1.2 根据抗剪强度相等的条件

$$\tau_f = \sigma \tan \varphi_d = \sigma \tan \varphi + c \quad (4)$$

由此可得

$$\varphi_d = \tan^{-1} \left[ \tan \varphi + c / (\rho g H) \right] \quad (5)$$

由公式(5)可知, 等效内摩擦角随着墙高而变化, 墙越高, 其值越小。

### 1.2 按朗肯土压力相等条件计算

1) 非黏性土的主动土压力强度。

$$\sigma_{ad} = \rho g z K_{ad} \quad (6)$$

$$E_a = \frac{1}{2} \rho g H^2 K_{ad} \quad (7)$$

$$K_{ad} = \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi_d}{2} \right) \quad (8)$$

2) 黏性土的主动土压力强度。

$$\sigma_a = \rho g z K_a - 2c \sqrt{K_a} \quad (9)$$

$$E_a = \frac{1}{2} \rho g H^2 K_a - 2cH \sqrt{K_a} + \frac{2c^2}{\rho g} \quad (10)$$

$$K_a = \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (11)$$

式中:  $\sigma_a$  为主动土压力强度;  $c$  为土的粘聚力;  $\varphi$  为土的内摩擦角;  $\rho$  为墙后填料的密度;  $z$  为计算点离填土面的深度;  $\varphi_d$  为土的等效内摩擦角。

根据朗肯土压力相等的条件得

$$E_a = \frac{1}{2} \rho g H^2 \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi_d}{2} \right) = \frac{1}{2} \rho g H^2 \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - 2cH \tan \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{2c^2}{\rho g} \quad (12)$$

由此可得

$$\varphi_d = 90^\circ - 2 \tan^{-1} \left[ \tan \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{2c}{\rho g H} \right] \quad (13)$$

由公式(13)可知, 等效内摩擦角随着墙高而变化, 墙越高其值越小, 与公式(5)的趋势相同。

### 1.3 按朗肯土压力对墙趾力矩相等条件计算

1) 非黏性土的主动土压力弯矩。

$$M_a = \frac{1}{3} H E_{ad} = \frac{1}{3} H \times \frac{1}{2} \rho g H^2 K_{ad} \quad (14)$$

2) 黏性土的主动土压力弯矩。

$$M = \frac{1}{3} (H - z_0) E_a = \frac{1}{3} (H - z_0) \left( \frac{1}{2} \rho g H^2 K_a - 2cH \sqrt{K_a} + \frac{2c^2}{\rho g} \right) \quad (15)$$

$$z_0 = \frac{2c}{\rho g \sqrt{K_a}} \quad (16)$$

根据朗肯土压力对墙趾力矩相等的条件得

$$M_a = \frac{1}{3} H \times \frac{1}{2} \rho g H^2 K_{ad} = \frac{1}{3} (H - z_0) \left( \frac{1}{2} \rho g H^2 K_a - 2cH \sqrt{K_a} + \frac{2c^2}{\rho g} \right) \quad (17)$$

由此可得

$$\varphi_d = 90^\circ - 2 \tan^{-1} \left[ \tan \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{2c}{\rho g H} \right] \cdot \sqrt{1 - \frac{2c}{\rho g H} \tan^{-1} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)} \quad (18)$$

## 1.4 算例

假定土的强度参数为  $\rho = 1.9 \text{ t/m}^3$ ,  $\varphi = 15^\circ$ ,  $c = 15 \text{ kPa}$  时, 对于给定高度分别为 4、5、6 m 的挡土墙, 按上述 3 种公式分别求得等效内摩擦角 (表 1)。

表 1 等效内摩擦角 ( $^\circ$ )

公式	H/m		
	4	5	6
(5)	24.95	23.07	21.78
(13)	49.13	41.40	36.49
(18)	60.89	51.79	45.54

通过表 1 可以看出, 3 种公式求得的等效内摩擦角均随着墙高的增加而降低。当挡土墙受抗滑条件控制时, 采用按朗肯土压力相等的条件计算出的公式 (13); 当挡土墙受抗倾条件控制时, 采用按朗肯土压力对墙趾力矩相等的条件计算出的公式 (18)。联系工程实际, 挡土墙的设计一般主要由抗滑和抗倾条件控制, 因此采用公式 (13) 和公式 (18) 计算等效内摩擦角是合理的。比较公式 (13) 和公式 (18), 发现采用公式 (13) 计算挡土墙稳定要安全一些, 并且公式 (13) 相对简便一些, 因此建议等效内摩擦角按抗滑条件控制计算为宜。

## 2 针对朗肯土压力相等条件计算的拓展

按朗肯土压力相等条件的计算方法相较于其余 2 种计算方法更合理一些, 但没有考虑墙后均载和水位的影响, 因此只能计算墙后无荷载及无水情况下的等效内摩擦角。本节给出基于朗肯土压力相等条件计算的考虑墙后均载和水位的计算公式。

### 2.1 有均载、无水情况下等效内摩擦角的计算

#### 2.1.1 根据朗肯主动土压力公式

##### 1) 非黏性土的主动土压力强度。

$$\sigma_{ad} = \rho g z K_{ad} + q K_{ad} \quad (19)$$

$$E_{ad} = \frac{1}{2} \rho g H^2 K_{ad} + q H K_{ad} \quad (20)$$

$$K_{ad} = \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi_d}{2} \right) \quad (21)$$

##### 2) 黏性土的主动土压力强度。

$$\sigma_a = q K_a + \rho g z K_a - 2c \sqrt{K_a} \quad (22)$$

$$E_a = q H K_a + \frac{1}{2} \rho g H^2 K_a - 2c H \sqrt{K_a} + \frac{2c^2}{\rho g} \quad (23)$$

$$K_a = \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (24)$$

式中:  $\sigma_a$  为主动土压力强度;  $q$  为墙后均载;  $c$  为土的粘聚力;  $\varphi$  为土的内摩擦角;  $\rho$  为墙后填料的密度;  $z$  为计算点离填土面的深度;  $\varphi_d$  为土的等效内摩擦角。

#### 2.1.2 根据朗肯土压力相等的条件

$$E_a = \left( \frac{1}{2} \rho g H^2 + q H \right) \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi_d}{2} \right) - 2c H \tan \left( 45^\circ - \frac{\varphi_d}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} \rho g H^2 + q H \right) \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{2c^2}{\rho g} \quad (25)$$

由此可得

$$\varphi_d = 90^\circ - 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{\tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{2c^2}{\rho g} - 2c H \tan \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)}{1/2 \rho g H^2 + q H}} \quad (26)$$

### 2.2 有均载、有水情况下等效内摩擦角的计算

根据朗肯主动土压力公式计算。

##### 1) 非黏性土的主动土压力强度。

$$E_{ad} = q H K_{ad} + \frac{1}{2} \rho g (H - H_1)^2 K_{ad} + \rho g (H - H_1) H_1 K_{ad} + \frac{1}{2} \rho' g H_1^2 K_{ad} \quad (27)$$

$$K_{ad} = \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi_d}{2} \right) \quad (28)$$

##### 2) 黏性土的主动土压力强度。

$$\textcircled{1} \text{ 当 } H_1 \leq H - z_0 \left( = H - \frac{2c}{\rho g} \sqrt{K_a} \right) \text{ 时,}$$

$$E_a = q H K_a + \frac{1}{2} \rho' g H_1^2 K_a + \frac{1}{2} K_1 (H + H_1 - z_0) \quad (29)$$

$$K_1 = \rho g (H - H_1) K_a - 2c \sqrt{K_a} \quad (30)$$

$$K_a = \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (31)$$

$$z_0 = 2c / (\rho g \sqrt{K_a}) \quad (32)$$

②当  $H_1 > H - z_0$  ( $= H - \frac{2c}{\rho g} \sqrt{K_a}$ ) 时,

$$E_a = qHK_a + \frac{1}{2}\rho'gH_1^2K_a + \frac{1}{2}K_2(z' - 2H_1) \quad (33)$$

$$K_2 = \rho g(H - H_1)K_a - 2c\sqrt{K_a} \quad (34)$$

$$K_a = \tan^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (35)$$

$$z' = K_2/(\rho'gK_a) \quad (36)$$

式中:  $\sigma_a$  为主动土压力强度;  $q$  为墙后均载;  $H_1$  为水位高;  $c$  为土的粘聚力;  $\varphi$  为土的内摩擦角;  $\rho$  为墙后填料的水上密度;  $\rho'$  为墙后填料的水下密度;  $z$  为计算点离填土面的深度;  $\varphi_d$  为土的等效内摩擦角。

根据朗肯土压力相等的条件, 可求得等效内摩擦角。

### 2.3 算例

假定土的强度参数为  $\rho = 1.9 \text{ t/m}^3$ ,  $\varphi = 15^\circ$ ,  $c = 15 \text{ kPa}$ , 对于给定高度分别为 4、5、6 m 的挡土墙, 墙后均载为  $q = 10、20、30 \text{ kPa}$  时, 求得等效内摩擦角见表 2。

表 2 墙后均载不同时的等效内摩擦角 ( $^\circ$ )

$q/\text{kPa}$	$H/\text{m}$		
	4	5	6
10	38.51	35.01	32.25
20	33.07	31.17	29.43
30	29.70	28.58	27.41

假定土的强度参数为  $\rho = 1.9 \text{ t/m}^3$ ,  $\rho' = 1.0 \text{ t/m}^3$ ,  $\varphi = 15^\circ$ ,  $c = 15 \text{ kPa}$ , 对于给定高度分别为 4、5、6 m 的挡土墙, 墙后均载为  $q = 10 \text{ kPa}$ , 水位高分别为 1、2、3 m 时, 求得等效内摩擦角见表 3。

表 3 水位不同时的等效内摩擦角 ( $^\circ$ )

$H_1/\text{m}$	$H/\text{m}$		
	4	5	6
1	39.34	35.46	32.51
2	43.07	36.91	33.33
3	55.50	40.40	34.89

分析表 2 可知, 等效内摩擦角随着墙后均载的增加而减小。结合表 1, 墙后均载对等效内摩擦角的影响很大, 说明在等效内摩擦角的计算中计入墙后均载的影响是必要的。

分析表 3 可知, 在一定范围内, 随着水位的升高, 等效内摩擦角增加, 在墙较矮时, 增加幅度尤为明显。说明在等效内摩擦角的计算中计入水位的影响是必要的。

### 3 结论

本文给出 3 种等效内摩擦角的计算方法, 分析各计算方法的适用条件, 选择出相对最合理的按朗肯土压力相等条件计算的方法。在此方法的基础上, 考虑墙后均载及水位, 推导得出新的等效内摩擦角计算公式, 并经对比分析, 可得如下结论:

1) 等效内摩擦角随着墙高的增加而降低, 说明在其他条件一定的情况下, 墙高越高, 受到的土压力越大。

2) 等效内摩擦角随着墙后均载的增加而降低, 说明在其他条件一定的情况下, 墙后均载越大, 受到的土压力越大。

3) 等效内摩擦角在一定范围内随着水位的升高而增加, 说明在一定范围内及其他条件一定的情况下, 水位越高, 受到的土压力越小。

### 参考文献:

- [1] 何运柏. 黏性土等效内摩擦角  $\varphi'$  值的选定[J]. 地基基础工程, 1995(2): 15-16.
- [2] 钱家欢. 土壤力学[M]. 上海: 大东书局, 1953.
- [3] 东南大学, 浙江大学, 湖南大学, 等. 土力学[M]. 3 版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2013.
- [4] 薛殿基, 冯仲林. 挡土墙设计实用手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008.
- [5] SL 379—2007 水工挡土墙设计规范[S].
- [6] GB 50286—2013 堤防工程设计规范[S].