



多孔介质中波浪传播的高阶 Boussinesq 方程*

张浩强¹, 刘忠波^{2,3,4}, 尹晶^{4,5}, 孙家文^{4,5}, 房克照^{3,4}

(1. 中国交通建设股份有限公司, 北京 100088; 2. 大连海事大学 交通运输管理学院, 辽宁 大连 116026;

3. 长沙理工大学, 水沙科学与水灾害防治湖南省重点实验室, 湖南 长沙 410076;

4. 大连理工大学, 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116023; 5. 国家海洋环境监测中心, 辽宁 大连 116023)

摘要: 准确模拟波浪在多孔介质中传播变形对于研究抛石防波堤等结构的消能作用是十分必要的。对 Laplace 方程、自由表面处的运动学方程和动力学方程以及海底运动学方程进行无因次化, 且以自由表面处速度势为切点, 进行幂级展开, 最终给出 4 个不同的高阶 Boussinesq 水波方程。在常水深下对这些方程的一维问题进行了理论研究, 并将无因次相速度和无因次虚波数与解析解结果进行对比, 方程的相速度与解析解吻合程度较好, 虚波数与解析解基本吻合, 表明高阶 Boussinesq 方程可用于模拟波浪在多孔介质中的传播变形。

关键词: 多孔介质; 波浪; Boussinesq 方程; 色散

中图分类号: P 731.2; U 65

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2016)06-0025-06

High-order Boussinesq equations for water-wave propagation in porous media

ZHANG Hao-qiang¹, LIU Zhong-bo^{2,3,4}, YIN Jing^{4,5}, SUN Jia-wen^{4,5}, FANG Ke-zhao^{3,4}

(1. China Communications Construction Co., Ltd., Beijing 100088, China; 2. Transportation Management College, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China; 3. Water Science and Water Disaster Prevention and Control in Hunan Province Key Laboratory, Changsha University of Technology, Changsha 410076, China; 4. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China; 5. National Marine Environmental Monitoring Center, Dalian 116023, China)

Abstract: Wave is an important environmental load on porous structures in coastal engineering. A reasonable mathematical model is very important when the problem mentioned above is numerically solved. To be applicable in such problem, with both of the drag resistance and inertia resistance considered, Laplace equations with boundary controlling conditions are given. First these equations are nondimensionalized, and started from the free surface velocity potential in still water depth, a power series of potential are supposed, and four sets of different Boussinesq models are derived. In a constant water depth, the dispersive relationship expressions of the four models in one dimension are given. And theoretical solutions of the Boussinesq models are compared against the analytical solution. Overall, both of the phase speed and imaginary wave number are in good agreement. And the high order Boussinesq models can be expected to be applicable for waves propagation in porous media.

Keywords: porous media; wave; Boussinesq equation; dispersion

抛石防波堤或护岸是近海工程中常见的结构形式, 这些结构带有很大孔隙, 使建筑物除具有反射波浪的功能外, 还可通过建筑物自身对波浪

的摩擦阻力消耗掉部分波能, 从而有效降低透过建筑物的波高。

关于波浪-多孔结构相互作用的研究主要有解

收稿日期: 2015-11-18

***基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (51579034); 辽宁省教育厅项目 (L2015062); 水沙科学与水灾害防治湖南省重点实验室开放基金资助项目 (2015SS01)

作者简介: 张浩强 (1980—), 男, 工程师, 从事水运建设的研究和管理。

析法、现场观测或数值模拟3种方法。每种方法各有优缺点，解析解的方法通常都是假设海底地形为平底，现场观测费时、费财，实验室模拟时测量多孔介质中的波浪存在一定困难。作为一种模拟近岸波浪传播变形的有效工具，Boussinesq方程模型具有良好的通用性，可期望用于研究这一问题。大多数Boussinesq方程的基本假定为海床不可渗^[1-7]，它们没有考虑渗透的影响。仅少数方程考虑了渗透介质的影响^[8-12]，如Hsiao等^[12]从欧拉方程出发，给出了适用于多孔介质中波浪传播变形的高阶Boussinesq方程，该模型是由渗透介质某一深度处速度和波面升高表达的，近似到二阶完全非线性，但是这种二阶色散性可能导致其不能准确模拟短波情况。为此在综合考虑多孔介质中的层流阻力和紊流阻力等因素的基础上，本文从Laplace方程出发，进行了高阶Boussinesq方程的推导。

1 高阶 Boussinesq 方程的理论推导

波浪在多孔介质中的传播见图1，图中 $\eta(x, y, t)$ 表示波浪在多孔介质中的波面升高(以静水面为起算面)，多孔介质的厚度为 $h_b(x, y)$ ， $\psi(x, y, z, t)$ 表示速度势。

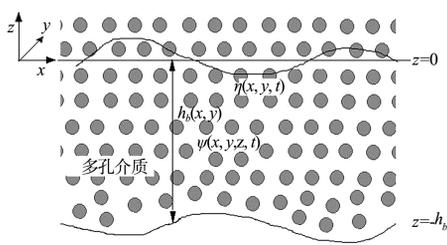


图1 波浪在多孔介质中的传播

取特征长度为 l_0 和特征水深为 h_0 ，引入以下无量纲量：

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{l_0}, & y' = \frac{y}{l_0}, & z' = \frac{z}{h_0} \\ h'_b = \frac{h_b}{h_0}, & \eta' = \frac{\eta}{a}, & t' = \frac{t\sqrt{gh_0}}{l_0} \\ \psi' = \frac{\psi}{a\sqrt{gh_0}}, & \varepsilon = \frac{a}{h_0}, & \mu = \frac{h_0}{l_0} \end{cases} \quad (1)$$

1.1 无因次化控制方程

为了简便起见，忽略了上标，则对应的Laplace控制方程、自由面运动学和动力学方程以及海底边界条件可写为：

$$\mu^2 \nabla^2 \psi + \psi_{zz} = 0 \quad -h_b < z < \varepsilon \eta \quad (2)$$

$$\mu^2 (c_r \psi_t + \alpha \psi + \eta) + \varepsilon c_r \cdot \frac{1}{2} [\mu^2 (\nabla \psi)^2 + \psi_z^2] = 0 \quad z = \varepsilon \eta \quad (3)$$

$$\mu^2 (\eta_t + \varepsilon \nabla \psi \cdot \nabla \eta) = \psi_z \quad z = \varepsilon \eta \quad (4)$$

$$\mu^2 \nabla \psi \cdot \nabla h_b + \psi_z = 0 \quad z = -h_b \quad (5)$$

式中： $c_r = n + (1-n)(1+c_m)$ 为惯性系数； n 为孔隙率； C_m 为附加质量系数； $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 |\nabla \psi|$ 为阻力系数， α_1 为线性阻力系数， α_2 为紊流阻力系数。

1.2 速度势展开

Boussinesq的最大优势就是将三维问题简化成二维问题，将速度势做如下展开：

$$\psi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \psi^{(n)}(x, y, t) \quad (6)$$

将式(6)代入方程(2)中，得

$$\psi^{(n+2)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \mu^2 \nabla^2 \psi^{(n)} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

速度势可表示为：

$$\psi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu^{2n} \cdot \left[\frac{z^{2n}}{(2n)!} \nabla^{2n} \psi^{(0)} + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \nabla^{2n} \psi^{(1)} \right] \quad (8)$$

由式(8)可知，速度势是用 $\psi^{(0)}$ 和 $\psi^{(1)}$ 的系列展开表示的，对式(8)求导可得：

$$\mathbf{u}_s(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu^{2n} \left[\frac{z^{2n}}{(2n)!} \nabla (\nabla^{2n-2} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_s)) + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \mu^2 \nabla (\nabla^{2n} w_s) \right] \quad (9)$$

$$w_s(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu^{2n+2} \left[-\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \nabla^{2n} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_s) + \frac{z^{2n}}{(2n)!} \nabla^{2n} w_s \right] \quad (10)$$

代入底边界条件可以得到：

$$w_s(x, y, t) = -\nabla \cdot (h_b \hat{\mathbf{u}}_s) + \mu^2 \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{6} h_b^3 \nabla (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_s) - \right.$$

$$\frac{1}{2}h_b^2 \nabla[\nabla \cdot (h_b \hat{\mathbf{u}}_s)] \Big\} + \mu^4 \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{24}h_b^4 \nabla[\nabla^2(\nabla \cdot (h_b \hat{\mathbf{u}}_s))] - \frac{1}{120}h_b^5 \nabla[\nabla^2(\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_s)] + \frac{1}{2}h_b^2 \nabla[\nabla \cdot (\frac{1}{6}h_b^3 \nabla(\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_s)) - \frac{1}{2}h_b^2 \nabla(\nabla \cdot (h_b \hat{\mathbf{u}}_s))] \right\} + O(\mu^6) \quad (11)$$

1.3 以静止水平面上的速度表达的方程

将表达式(8)和(9)分别代入方程(3)和(4), 对前面得到的方程取 ∇ , 进而利用表达式(11)来消除方程中包含的 $w_s(x, y, t)$ 。在 $\varepsilon = O(\mu)$ 假设下可得:

$$\hat{\mathbf{u}}_{st} + \alpha/c_r \hat{\mathbf{u}}_s + \nabla \eta/c_r + \varepsilon \frac{1}{2} \nabla(\hat{\mathbf{u}}_s)^2 + \mu^2(\varepsilon T_{21} + \varepsilon^2 T_{22} + \varepsilon^3 T_{23}) + \mu^4(\varepsilon T_{41}) = O(\mu^6, \varepsilon^2 \mu^4) \quad (12)$$

$$T_{21} = \nabla \left[-\eta \nabla \cdot (h_b \hat{\mathbf{u}}_{st}) - \alpha/c_r \eta \nabla \cdot (h_b \hat{\mathbf{u}}_s) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (h_b \hat{\mathbf{u}}_s)^2 \right] \quad (12a)$$

$$T_{22} = \nabla \left[-\frac{1}{2} \eta^2 \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_{st} - \frac{1}{2} \alpha/c_r \eta^2 \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_s - \eta \hat{\mathbf{u}}_s \cdot \nabla \nabla \cdot (h_b \hat{\mathbf{u}}_s) + \eta \nabla \cdot (h_b \hat{\mathbf{u}}_s) \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_s \right] \quad (12b)$$

$$T_{23} = \nabla \left[-\frac{1}{2} \eta^2 \hat{\mathbf{u}}_s \cdot \nabla \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_s + \frac{1}{2} (\eta \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_s)^2 \right] \quad (12c)$$

$$T_{41} = \nabla [\eta \nabla \cdot (h_b^2 \Gamma_t) + \alpha/c_r \eta \nabla \cdot (h_b^2 \Gamma) - \nabla \cdot (h_b^2 \Gamma) \nabla \cdot (h_b \hat{\mathbf{u}}_s)] \quad (12d)$$

$$\Gamma = \frac{1}{6} h_b \nabla(\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_s) - \frac{1}{2} \nabla[\nabla \cdot (h_b \hat{\mathbf{u}}_s)] \quad (12e)$$

$$\eta_t + \nabla \cdot Q = 0 \quad (13)$$

$$Q \equiv \int_{-hb}^{\varepsilon \eta} \nabla \psi dz = \hat{\mathbf{u}}_s (h_b + \varepsilon \eta) - \mu^2 \left\{ \frac{1}{6} (\varepsilon^3 \eta^3 + h_b^3) \cdot \nabla(\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_s) + \frac{1}{2} (\varepsilon^2 \eta^2 - h_b^2) \nabla[\nabla \cdot (h_b \hat{\mathbf{u}}_s)] \right\} + \mu^4 \left\{ \frac{1}{2} (\varepsilon^2 \eta^2 - h_b^2) \nabla[\nabla \cdot (h_b^2 \Gamma)] + \frac{1}{24} (\varepsilon^4 \eta^4 - h_b^4) \nabla[\nabla^2(\nabla \cdot (h_b \hat{\mathbf{u}}_s))] + \frac{1}{120} (\varepsilon^5 \eta^5 + h_b^5) \nabla[\nabla^2(\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_s)] \right\} + O(\mu^6) \quad (13a)$$

1.4 以水深积分平均速度表达的 Boussinesq 方程

引入沿渗透介质厚度上积分平均速度:

$$\bar{\mathbf{u}}_s = \frac{1}{h_b + \varepsilon \eta} \int_{-hb}^{\varepsilon \eta} \nabla \psi dz \quad (14)$$

连续方程可写为:

$$\eta_t + \nabla \cdot [(h_b + \varepsilon \eta) \bar{\mathbf{u}}_s] = 0 \quad (15)$$

将(14)代入(12)、(13), 并引入 $|\nabla^n(h_b)| = O(\mu^n)$, $n=1, 2, 3$ 的缓坡假定可得

$$\bar{\mathbf{u}}_{st} + \alpha/c_r \bar{\mathbf{u}}_s + \nabla \eta/c_r + \varepsilon \frac{1}{2} \nabla(\bar{\mathbf{u}}_s)^2 + \mu^2(T_{M20} + \varepsilon T_{M21} + \varepsilon^2 T_{M22} + \varepsilon^3 T_{M23}) + \mu^4(T_{M40} + \varepsilon T_{M41}) = O(\mu^6, \varepsilon^2 \mu^4) \quad (16)$$

$$\text{其中:} \quad T_{M20} = h_b \Gamma_t + \alpha/c_r h_b \Gamma \quad (16a)$$

$$T_{M21} = -\eta \Gamma_t - \alpha/c_r \eta \Gamma + \nabla \left[\bar{\mathbf{u}}_s \cdot (h_b \Gamma) - \eta \nabla \cdot (h_b \bar{\mathbf{u}}_{st}) - \alpha/c_r \eta \nabla \cdot (h_b \bar{\mathbf{u}}_s) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (h_b \bar{\mathbf{u}}_s)^2 \right] \quad (16b)$$

$$T_{M22} = \frac{1}{6} \eta^2 \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_{st}) + \alpha/c_r \eta^2 \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s) - \frac{1}{3} \eta \nabla \cdot (h_b \bar{\mathbf{u}}_s) \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s) + \nabla \cdot (\eta \bar{\mathbf{u}}_s) \Gamma + \nabla[\eta \bar{\mathbf{u}}_s \cdot \Gamma - \frac{1}{2} \eta^2 \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_{st} - \frac{1}{2} \alpha/c_r \eta^2 \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s - \eta \bar{\mathbf{u}}_s \cdot \nabla \nabla \cdot (h_b \bar{\mathbf{u}}_s) + \eta \nabla \cdot (h_b \bar{\mathbf{u}}_s) \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s] \quad (16c)$$

$$T_{M23} = -\frac{1}{3} \eta \nabla \cdot (\eta \bar{\mathbf{u}}_s) \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s) + \nabla \left[-\frac{1}{3} \eta^2 \bar{\mathbf{u}}_s \cdot \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_{st} + \frac{1}{2} (\eta \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s)^2 \right] \quad (16d)$$

$$T_{M40} = \frac{1}{24} h_b^3 \nabla(\nabla^2(\nabla \cdot (h_b \bar{\mathbf{u}}_{st}))) - \frac{1}{120} h_b^4 \nabla(\nabla^2(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_{st})) + \frac{1}{6} h_b^2 \nabla(\nabla \cdot (h_b \Gamma_t)) + \alpha/c_r \left[\frac{1}{24} h_b^3 \nabla(\nabla^2(\nabla \cdot (h_b \bar{\mathbf{u}}_s))) - \frac{1}{120} h_b^4 \nabla(\nabla^2(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s)) + \frac{1}{6} h_b^2 \nabla(\nabla \cdot (h_b \Gamma)) \right] \quad (16e)$$

$$T_{M41} = \frac{1}{45} h_b^3 \eta \nabla(\nabla^2(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_{st})) - \frac{1}{9} h_b^3 \nabla(\nabla \cdot (\eta \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_{st}))) + \alpha/c_r \left[\frac{1}{45} h_b^3 \eta \nabla(\nabla^2(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s)) - \frac{1}{9} h_b^3 \nabla(\nabla \cdot (\eta \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s))) \right] - \frac{1}{45} h_b^4 \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s \nabla(\nabla^2(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s)) + \frac{1}{9} h_b^4 \nabla[\nabla \cdot (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s (\nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s)))] + \frac{1}{18} h_b^4 \nabla(\nabla(\nabla \bar{\mathbf{u}}_s))^2 \quad (16f)$$

$$\Gamma = \frac{1}{6} h_b \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_s) - \frac{1}{2} \nabla(\nabla \cdot (h_b \bar{\mathbf{u}}_s)) \quad (16g)$$

方程(15)和方程(16)组成了一组近似到

$O(\mu^6, \varepsilon^2\mu^4)$ 的高阶 Boussinesq 方程。

1.5 以某一水深处速度表达的高阶 Boussinesq 方程

近似到 $O(\mu^4)$ ，某一水深处 z 处的速度势表达式为：

$$\psi(x, y, z_\alpha h_b, t) = \psi^{(0)} - \mu^2 z \nabla \cdot (h_b \nabla \psi^{(0)}) - \frac{1}{2} \mu^2 z^2 h_b^2 \nabla^2 \psi^{(0)} + O(\mu^4) \quad (17)$$

则某一水深处速度与静水面处速度的关系表达式如下：

$$\hat{\mathbf{u}}_s = \mathbf{u}_{s\alpha} + \mu^2 \left[z_\alpha h_b \nabla \nabla \cdot (h_b \mathbf{u}_{s\alpha}) + \frac{1}{2} z_\alpha^2 h_b^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_{s\alpha} \right] \quad (18)$$

将关系表达式(19)代入方程(13)和(14)可得

$$\mathbf{u}_{s\alpha t} + \alpha/c_r \mathbf{u}_{s\alpha} + \nabla \eta/c_r + \varepsilon \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}_{s\alpha})^2 + \mu^2 (T_{s20} + \varepsilon T_{s21} + \varepsilon^2 T_{s22} + \varepsilon^3 T_{s23}) = O(\mu^4) \quad (19)$$

其中： $T_{s20} = \Gamma_{s\alpha t} + \alpha/c_r \Gamma_{s\alpha}$ (19a)

$$T_{s21} = \nabla [-\eta \nabla \cdot (h_b \mathbf{u}_{s\alpha t}) - \alpha/c_r \eta \nabla \cdot (h_b \mathbf{u}_{s\alpha}) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (h_b \mathbf{u}_{s\alpha})^2 + \mathbf{u}_{s\alpha} \cdot \Gamma_{s\alpha}] \quad (19b)$$

$$T_{s22} = \nabla \left[-\frac{1}{2} \eta^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_{s\alpha t} - \frac{1}{2} \alpha/c_r \eta^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_{s\alpha} - \eta \mathbf{u}_{s\alpha} \cdot \nabla \nabla \cdot (h_b \mathbf{u}_{s\alpha}) + \eta \nabla \cdot (h_b \mathbf{u}_{s\alpha}) \nabla \cdot \mathbf{u}_{s\alpha} \right] \quad (19c)$$

$$T_{s23} = \nabla \left[-\frac{1}{2} \eta^2 \mathbf{u}_{s\alpha} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_{s\alpha} + \frac{1}{2} (\eta \nabla \cdot \mathbf{u}_{s\alpha})^2 \right] \quad (19d)$$

$$\Gamma_{s\alpha} = z_\alpha h_b \nabla \nabla \cdot (h_b \mathbf{u}_{s\alpha}) + \frac{1}{2} z_\alpha^2 h_b^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_{s\alpha} \quad (19e)$$

$$\eta_t + \nabla \cdot \left[(h_b + \varepsilon \eta) \mathbf{u}_{sa} + \mu^2 \left(\frac{1}{2} h_b^2 + z_\alpha h_b^2 + \varepsilon z_\alpha \eta h_b - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \eta^2 \right) \cdot \nabla (\nabla \cdot (h_b \mathbf{u}_{sa})) + \left(\frac{1}{2} z_\alpha^2 h_b^3 - \frac{1}{6} h_b^3 + \varepsilon z_\alpha^2 \eta h_b^2 - \frac{1}{6} \varepsilon^3 \eta^3 \right) \cdot \nabla (\nabla \cdot (h_b \mathbf{u}_{sa})) \right] = 0 \quad (20)$$

方程(19)和(20)组成了某一水深处速度表达的高阶 Boussinesq 方程。

1.6 方程的拓展

1.6.1 以水深积分平均速度表达的方程的改进

为拓展方程适用水深，在近似到二阶的动量方程(16)中引入刘忠波等^[7]建议的表达式：

$$T_{exta1} = \beta_2 (h_b + \varepsilon \eta) \mu^2 \nabla \nabla \cdot \{ (h_b + \varepsilon \eta) [\bar{\mathbf{u}}_{st} + \nabla \eta/c_r + \alpha/c_r \bar{\mathbf{u}}_s + \varepsilon \nabla (\bar{\mathbf{u}}_s^2)/2] \} + \beta_1 (h_b + \varepsilon \eta) 2\mu^2 \nabla \nabla \cdot [\bar{\mathbf{u}}_{st} + \nabla \eta/c_r + \alpha/c_r \bar{\mathbf{u}}_s + \varepsilon \nabla (\bar{\mathbf{u}}_s^2)/2] = O(\mu^4) \quad (21)$$

式(21)中的两个参数可以改善方程的色散性，当增加式(21)后，方程(16)可以写成：

$$\bar{\mathbf{u}}_{st} + \alpha/c_r \bar{\mathbf{u}}_s + \nabla \eta/c_r + \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \nabla (\bar{\mathbf{u}}_s)^2 + \mu^2 (T_{M20} + \varepsilon T_{M21} + \varepsilon^2 T_{M22} + \varepsilon^3 T_{M23}) + T_{exta1} = O(\mu^4) \quad (22)$$

方程(15)和方程(16)组成的方程组是以水深积分平均表达的方程组，该方程存在着奇点，利用 Madsen 等^[1]推荐的方法进行拓展：

$$T_{exta2} = (\gamma_2 - \gamma_1) h_b^2 \mu^2 \{ \nabla \nabla \cdot [\bar{\mathbf{u}}_{st} + \nabla \eta/c_r + \alpha/c_r \bar{\mathbf{u}}_s + \varepsilon \nabla (\bar{\mathbf{u}}_s^2)/2] + \mu^2 \nabla \nabla \cdot (T_{M20}) + \varepsilon \mu^2 \nabla \nabla \cdot (T_{M21}) \} - \gamma_2 h_b \mu^2 \{ \nabla \nabla \cdot [h_b (\bar{\mathbf{u}}_{st} + \nabla \eta/c_r + \alpha/c_r \bar{\mathbf{u}}_s + \varepsilon \nabla (\bar{\mathbf{u}}_s^2)/2)] + \mu^2 \nabla \nabla \cdot (h_b T_{M20}) + \varepsilon \mu^2 \nabla \nabla \cdot (h_b T_{M21}) \} + \gamma_3 h_b^4 \mu^4 \cdot \{ \nabla [\nabla^2 (\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}_{st} + \nabla \eta/c_r + \alpha/c_r \bar{\mathbf{u}}_s + \varepsilon \nabla (\bar{\mathbf{u}}_s^2)/2))] \} + \gamma_4 h_b^3 \nabla h_b \mu^4 [\nabla^2 (\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}_{st} + \nabla \eta/c_r + \alpha/c_r \bar{\mathbf{u}}_s))] = O(\mu^6, \varepsilon^2 \mu^4) \quad (23)$$

将方程(23)加到方程(16)后，可以写成

$$\bar{\mathbf{u}}_{st} + \alpha/c_r \bar{\mathbf{u}}_s + \nabla \eta/c_r + \varepsilon \frac{1}{2} \nabla (\bar{\mathbf{u}}_s)^2 + \mu^2 (T_{M20} + \varepsilon T_{M21} + \varepsilon^2 T_{M22} + \varepsilon^3 T_{M23}) + \mu^4 (T_{M40} + \varepsilon T_{M41}) + T_{exta2} = O(\mu^6, \varepsilon^2 \mu^4) \quad (24)$$

1.6.2 以水深某一位置处速度表达的方程的改进

合理取参数，可改善方程(19)和(20)组成的模型的色散性。为了进一步改善其色散关系，引入下式：

$$T_{extra3} = (\delta_2 - \delta_1) \mu^2 \nabla \cdot \{ h_b^2 \nabla [\eta_t + \nabla \cdot ((h_b + \varepsilon \eta) \cdot \mathbf{u}_{sa})] \} - \delta_2 \mu^2 \nabla^2 \{ h_b^2 [\eta_t + \nabla \cdot ((h_b + \varepsilon \eta) \mathbf{u}_{sa})] \} = O(\mu^4) \quad (25)$$

$$T_{extra4} = (\delta_4 - \delta_3) \mu^2 (h_b + \varepsilon \eta)^2 \nabla^2 [\mathbf{u}_{s\alpha t} + \varepsilon \mathbf{u}_{s\alpha} \cdot \nabla \mathbf{u}_{s\alpha} + \nabla \eta/c_r + \alpha/c_r \mathbf{u}_{s\alpha}] - \delta_4 \mu^2 (h_b + \varepsilon \eta) \nabla^2 \{ (h_b + \varepsilon \eta) [\mathbf{u}_{s\alpha t} + \varepsilon \mathbf{u}_{s\alpha} \cdot \nabla \mathbf{u}_{s\alpha} + \nabla \eta/c_r + \alpha/c_r \mathbf{u}_{s\alpha}] \} = O(\mu^4) \quad (26)$$

将方程(25)和(26)分别加入到方程(20)和方程(19)中可得到新的一组方程：

$$\mathbf{u}_{s\alpha t} + \alpha/c_r \mathbf{u}_{s\alpha} + \nabla \eta/c_r + \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}_{s\alpha})^2 + \mu^2 (T_{s0} + \varepsilon T_{s1} +$$

$$\varepsilon^2 T_{s2} + \varepsilon^3 T_{s3} + T_{extra4} = O(\mu^4) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \eta_r + \nabla \cdot [(h_b + \varepsilon \eta) \mathbf{u}_{sa} + \mu^2 [(\frac{1}{2} h_b^2 + z_\alpha h_b^2 + \varepsilon z_\alpha \eta h_b - \\ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \eta^2) \nabla (\nabla \cdot (h_b \mathbf{u}_{sa})) (\frac{1}{2} z_\alpha^2 h_b^3 - \frac{1}{6} h_b^3 + \varepsilon z_\alpha^2 \eta h_b^2 - \\ \frac{1}{6} \varepsilon^3 \eta^3) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{sa})] + T_{extra3} = O(\mu^4) \end{aligned} \quad (28)$$

2 方程的色散性分析

不考虑海底地形变化, 忽略非线性和水深变量对 x 的导数, 对由方程 (15) 和 (22) 组成的模型 1、(15) 和 (24) 组成的模型 2、(19) 和 (20) 组成的模型 3、(27) 和 (28) 组成的模型 4 进行色散性分析, 可得如下色散关系式:

1) 模型 1。

$$\omega^2 (c_r + \alpha_1 i / \omega) = g K h_b \cdot \frac{1 + (\beta_1 + \beta_2) K^2 h_b^2}{1 + (1/3 + \beta_1 + \beta_2) K^2 h_b^2} \quad (29)$$

式中: ω 为频率; K 为复波数, $K = k_r + i k_i$, 虚数 i 满足 $i^2 = -1$ 。

2) 模型 2。

$$\omega^2 (c_r + \alpha_1 i / \omega) = g K h_b \cdot \frac{1 + \gamma_1 K^2 h_b^2 + \gamma_3 K^4 h_b^4}{1 + (1/3 + \gamma_1) K^2 h_b^2 + (\gamma_3 + \gamma_1/3 - 1/45) K^4 h_b^4} \quad (30)$$

3) 模型 3。

$$\omega^2 (c_r + \alpha_1 i / \omega) = g K h_b \cdot \frac{1 - (1/3 + B) K^2 h_b^2}{1 - B K^2 h_b^2} \quad (31)$$

式中: $B = z_\alpha + z_\alpha^2/2$ 。

4) 模型 4。

$$\omega^2 (c_r + \alpha_1 i / \omega) = g K h_b \cdot \frac{1 + (\delta_1 + \delta_3 - B - 1/3) K^2 h_b^2 + \delta_1 (\delta_3 - B - 1/3) K^4 h_b^4}{1 + (\delta_1 + \delta_3 - B) K^2 h_b^2 + \delta_3 (\delta_1 - B) K^4 h_b^4} \quad (32)$$

经分析和编程计算, 以上模型的建议参数值见表 1。

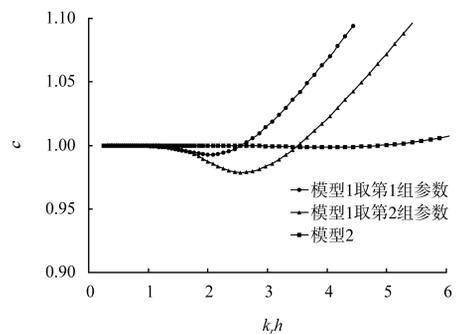
表 1 不同模型对应的参数具体取值

模型	参数取值
1	$\beta_1 = -0.0013, \beta_2 = -0.0654$ (第 1 组) 或 $\beta_1 = 0.0073, \beta_2 = -0.064$ (第 2 组)
2	$\gamma_1 = 1/9, \gamma_2 = 0.146488, \gamma_3 = 1/945, \gamma_4 = 0.00798359$
3	$B = -0.4$ 或 $B = -0.39$
4	$\delta_1 = 0.101, \delta_3 = 0.039, B = -0.305, \delta_3 = 0.082, \delta_4 = 0.162$

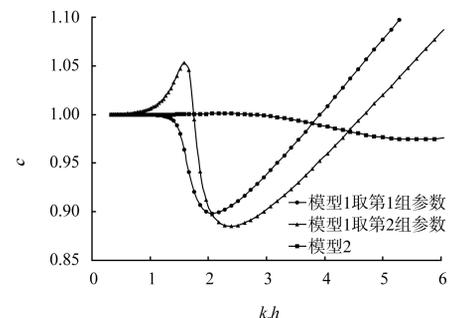
为了对比不同方程的相速度和 k_i , 采用了 Hsiao 等文献中给出的解析色散关系表达式^[12]:

$$\omega^2 (c_r + \alpha_1 i / \omega) = g K \tanh(K h_b) \quad (33)$$

以模型 1 和模型 2 说明波浪相速度和虚波数情况, 当 α_1 为 2、4 s/m 时的计算结果见图 2。图中横坐标为 $k_{rAS} h$, 纵坐标为 $c = C_B/C_{AS} = (\omega/k_{rB}) / (\omega/k_{rAS}) = k_{rAS}/k_{rB}$, 其中 c 为无因次相速度, C_B 为 Boussinesq 对应的相速度, C_{AS} 为相速度对应的解析解, k_{rB} 为 Boussinesq 方程对应的波数实部。由图 2 可知, 在 3 种不同情况下, 模型 2 均能给出较好的结果, 在所给算例中 $k_{rAS} h \leq 6$ 的最大误差仅为 2.5%, 这反映出深水处高阶色散项的重要性。同样的, 当 α_1 为 2、4 s/m 时, 定义无因次虚波数 $c(k_i) = k_{iAS}/k_{iB}$, $c(k_i)$ 随着水深的变化见图 3。综合来看, 无论是模型 1 还是模型 2, 方程实波数的适用水深均大于虚波数的适用水深。这反映了在多孔介质中波浪的虚波数是限制方程适用的更重要原因。



a) $\alpha_1 = 2 \text{ s/m}, c_r = 1$



b) $\alpha_1 = 4 \text{ s/m}, c_r = 1$

图 2 无因次相速度随水深的变化

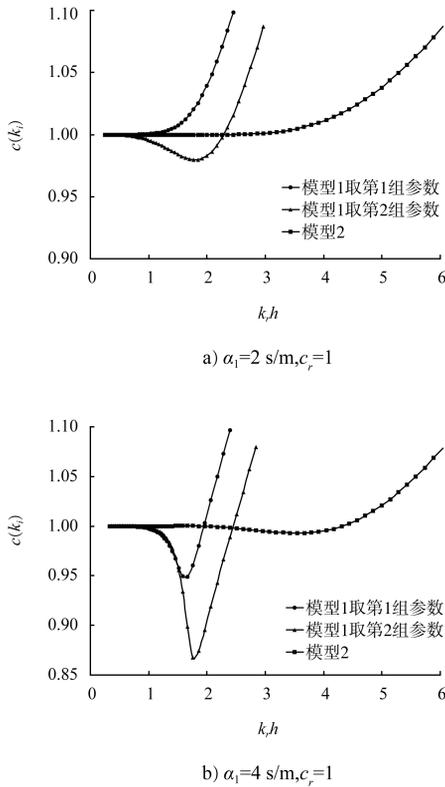


图3 无因次虚波数随水深的变化

3 结论

考虑多孔拖曳阻力和惯性阻力作用下，结合 Laplace 方程、自由表面的运动学和动力学方程和海底运动学方程，以静水面上的速度势作为基本参变量进行幂级展开，给出了以静水面上的速度和波面升高表达的 Boussinesq 水波方程。进一步采用沿水深积分平均速度和某一水深处速度表达的 Boussinesq 方程，在这些方程中进一步引入高阶色散项色散加强方程色散性能，最终导出 4 组高阶 Boussinesq 方程。在一维常水深情况，分析了这 4 个模型的色散关系式，并与解析解进行比较。研究表明：模型 1（以第 1 组参数为例）近似到二阶完全非线性，能给出较为合理的无因次相速度和虚波数。模型 2 近似到 $O(\epsilon\mu^4)$ 完全非线性，能给出更为准确的无因次相速度和虚波数。

参考文献：

- [1] Madsen P A, Schäffer H A. Higher-order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis[J]. Phil Trans R Soc Lond: A, 1998, 356: 3 123-3 184.
- [2] Nwogu O. An alternative form of the Boussinesq equations for near shore wave propagation[J]. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, 1993, 119 (6): 618-638.
- [3] Gobbi M F, Kirby J T. Wave evolution over submerged sills: Tests of a high-order Boussinesq model[J]. Coastal Engineering, 1999, 37: 57-96.
- [4] 邹志利. 高阶 Boussinesq 水波方程[J]. 中国科学: E 辑, 1997, 27(5): 460-473.
- [5] 邹志利. 适合复杂地形的高阶 Boussinesq 方程[J]. 海洋学报, 2001, 23(1): 109-119.
- [6] 刘忠波, 邹志利, 孙昭晨. 加强的适合复杂地形的水波方程及其一维数值模型验证[J]. 海洋学报, 2008, 30(3): 117-125.
- [7] 刘忠波, 房克照, 邹志利. 近似到 $O(\mu^2)$ 阶完全非线性的 Boussinesq 水波方程[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2012, 33(5): 556-561.
- [8] Cruz E C, Isobe M, Watanabe A. Boussinesq equations for wave transformation on porous beds[J]. Coastal Engineering, 1997, 30: 125-156.
- [9] Hsiao S C, Liu L F, Chen Y. Nonlinear water waves propagating over a permeable bed [C]//Proceedings of Mathematical, Physical & Engineering Sciences. USA: American Mathematical Society, 2002: 1 291-1 322.
- [10] Chen Q. Fully nonlinear Boussinesq-type equations for waves and currents over porous beds [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2006, 132(2): 220-230.
- [11] 刘忠波, 孙昭晨. 波浪在渗透海床上传播的数学模型[J]. 中国科技论文在线, 2011(5): 374-379.
- [12] Hsiao S C, Hu K C, Hwung H H. Extended Boussinesq equations for water-wave propagation in porous media[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2010(5): 625-640.

(本文编辑 武亚庆)