



计算几何在重力式结构稳定计算中的应用*

张丽媛, 罗少桢, 汤建宏, 于忠涛, 杨 华

(中交水运规划设计院有限公司, 北京 100007)

摘要: 针对重力式结构设计中进行多荷载工况、多设计方案的稳定性计算时, 各种组合情况下的重力作用效应计算费时费力的问题提出基于计算几何学的计算方法, 该算法将重力作用效应的计算问题简化。对重力式结构的设计断面, 首先判断其凹凸性, 然后利用水位线将其分解为多个子多边形, 再根据子多边形内是否存在凹点计算子多边形面积、质心, 最后汇总计算原设计断面的面积、质心和重力作用效应, 进而得到稳定性指标。根据该算法编制了一套计算机程序, 将其应用于株洲二线船闸项目的闸室计算, 得到了良好的效果。

关键词: 计算几何; 重力式结构; 稳定性分析; 自动化

中图分类号: U 656

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2015)06-0168-06

Application of calculation geometry instability analysis of gravity structure

ZHANG Li-yuan, LUO Shao-zhen, TANG Jian-hong, YU Zhong-tao, YANG Hua

(CCCC Water Transportation Consultants Co., Ltd., Beijing 100007, China)

Abstract: The effect of gravity often costs time and effort in stability calculation in combination of multi-load case and multi-scheme. An algorithm based on the computation geometry is introduced to simplify the calculation of the gravity structure's stability. The design section is cut to sub-polygons by water level after its convexity concavity is judged. The area and barycenter of sub-polygons are calculated respectively considering whether the concave point insists in it. Then it is summarized to deduce effect of gravity and safety coefficient. A set of computer program is compiled based on the above algorithm, which is tested and verified by the application in a ship lock project.

Keywords: computation geometry; gravity structure; stability analysis; automation

重力式结构具有坚固耐用、施工方便的特点, 在我国的内河船闸^[1]、海港码头^[2]、重力坝^[3]等工程中得到广泛应用。重力式结构依靠自身重力维持结构稳定、抵御外部荷载。为了达到美观经济的效果, 应在满足抗滑、抗倾、抗浮以及地基承载力要求的条件下, 尽量减小设计断面。目前, 无论是基于刚体极限平衡理论的安全系数法^[4], 还是以概率论为基础的可靠度分析方法^[5], 或是有限元分析方法^[6], 在对多种水位组合进行稳定性分析时, 每种组合都要求按照密度等特性的不

同, 区分水上结构和水下结构(如土体、结构体、回填料等), 重力作用效应在这种多工况计算时繁琐费力。

近半个世纪以来, 计算几何^[7]伴随着计算机技术的发展而产生, 成为研究几何基元、查找、优化^[8-10]等问题的学科。它包括依据样条函数处理曲线和曲面、图形信息的计算机处理和图形运算^[11]、几何定理的机器证明等。它通过探讨几何形体的计算机表示, 使得几何形体的数学模型更加灵活、有效地建立并且在计算机中得到更好的

收稿日期: 2014-11-22

*基金项目: 国家自然科学基金(51109118); 浙江省自然科学基金(LY14E090001)

作者简介: 张丽媛(1988—), 女, 硕士, 助理工程师, 从事内河航运和海港码头方面的研究。

存储和管理, 系统、成熟的理论和计算手段保证了结果的正确性。

目前, 我国的设计规范依据刚体极限平衡法对重力式结构进行稳定计算。通过比较荷载作用和结构抗力的比值关系, 得到稳定性计算结果。重力作用效应是结构抗力的重要组成部分, 但对于一些较复杂的设计断面, 如果存在预留孔洞等情况, 计算则往往较为困难。实际上, 设计条件(如结构断面、水位、材料条件等)与稳定性指标存在对应的关系, 只要能利用数学形式准确描述, 就能便捷高效地进行稳定性计算。本文基于计算几何理论, 对上述问题进行研究并提出了一套算法。该算法首先对设计断面进行凸凹性判断, 然后根据结构与水位相对位置关系对设计断面进行切割, 计算子多边形的面积、质心, 最后汇总计算原设计断面的面积、质心及结构重力作用效应。该结果为稳定性计算提供了初始条件, 为重力式结构方案比较和选择的自动化提供了良好的算法基础, 为项目决策实施提供了依据。

1 刚体极限平衡法

刚体极限平衡法要求重力式结构满足抗滑、抗倾、抗浮的要求, 即满足:

$$\text{抗滑: } \gamma_d \gamma_0 \sum (\gamma_i \varphi_i P_i) \leq \sum (\gamma_j \varphi_j F_j) f \quad (1)$$

$$\text{抗倾: } \gamma_d \gamma_0 \sum (\gamma_i \varphi_i M_i) \leq \sum (\gamma_j \varphi_j M'_j) \quad (2)$$

$$\text{抗浮: } \gamma_d \gamma_0 \sum (\gamma_i \varphi_i V_i) \leq \sum (\gamma_j \varphi_j F_j) \quad (3)$$

其中: $G_{1m} = \sum (\gamma_i A_i)$, $E_{1m} = \sum (K \gamma_i A_i)$, $M = \sum (F_i C_{xi})$, 特别地 $M_G = \sum (\gamma_i A_i C_{xi})$, $M_E = \sum (K \gamma_i A_i C_{xi})$ 。式中: f 为摩擦系数, γ_d 为结构系数, γ_0 为结构重要性系数, γ_i 为荷载的分项系数, φ 为荷载组合系数; P_i 为水平荷载, F_i 为竖直荷载(方向竖直向下), V_i 为竖向荷载(方向竖直向上), G_{1m} 为每延米结构自重, E_{1m} 为每延米土压力荷载, C_{xi} 为荷载作用点的力矩, K 为土压力系数。重力式结构设计中, 需要考虑的荷载及其确定方式见表 1。

表 1 稳定性计算荷载效应及影响因素

荷载	影响因素
结构自重、土重	结构断面、水位
均载、机械荷载、系缆力、撞击力等	设计条件直接确定
土压力、波浪力	结构断面、水位(规范中公式可给出结果)

表 1 中, 结构自重、土重的荷载值及其弯矩可分别由 $\sum (\rho_i g A_i L_i)$ 和 $\sum (\rho_i g A_i L_i C_i)$ 求出, ρ_i 为材料密度, A_i 为设计断面面积, L_i 为结构长度, C_i 为力臂长度。 $\sum (\rho_i g A_i L_i)$ 和 $\sum (\rho_i g A_i L_i C_i)$ 无法由设计条件或规范中的公式直接计算得出, 面积 A_i 、质心 C_i 也不易求出, 本文提出基于计算几何学的方法来求解这个问题。利用设计断面的平面拓扑及分割线的位置编制切割算法、子结构的面积和质心算法, 将计算结果加权汇总为原设计断面的面积和、质心、重力作用效应, 最后将重力作用效应与其他荷载作用效应进行组合, 按照公式(1)~(3)得出稳定性指标。

2 算法设计

2.1 问题描述

重力式结构在不同水位下, 或者由于材料不同等原因形成多个特征区的问题, 可描述为平面上任意多边形被任意直线切割的问题。重力式结构的设计结构断面被水位切割属于上述问题的特殊情况, 因水位线为水平直线, 其直线方程参数少。平面上的多边形分为凸多边形或凹多边形, 并且可能存在孔洞。任意直线与其相交, 可能无交点、有两个交点或有多个交点(图 1)。

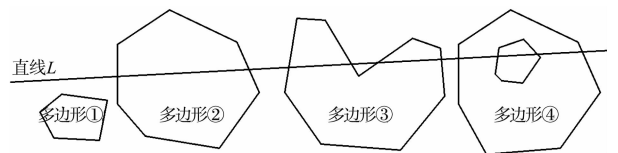


图 1 多边形与直线相交

本文讨论一般多边形被直线切割时面积、质心的普适算法。当设计断面不存在孔洞时, 水位线将其切割为水上、水下两部分或结构全部位于

水上或水下（不产生子多边形）；存在孔洞时，孔洞的轮廓线构成独立多边形，其面积、质心可参照独立多边形的计算方法计算并将面积记为负值。由设计断面的面积、质心得到重力式结构稳定性指标的计算流程见图2。

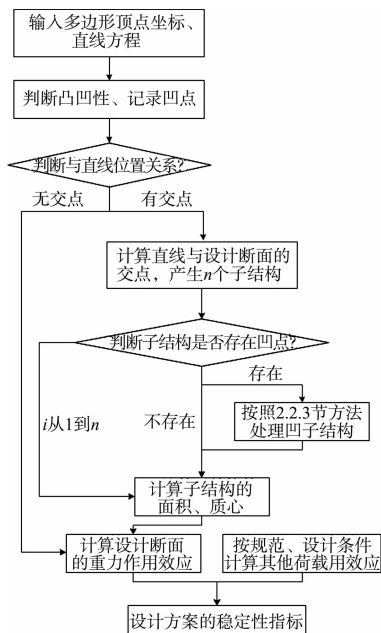


图2 设计计算流程

2.2 算法设计

2.2.1 判断凸凹性

凸多边形也称为简单多边形，对其任意一条边而言，多边形的所有顶点都在同一侧。假设多边形的顶点为 p_1, p_2, \dots, p_n 。对于 $\forall i$ (i 为沿着多边形顶点逆时针或顺时针旋转标记多边形顶点时，某顶点的角编号)，线段 $p_{i-1}p_{i+1}$ 的 $1/k$ 点记为 c_i ($k > 1$ ，可以任意取值)，过 c_i 的平行于 x 轴的射线记为 s_i ， s_i 与原多边形的交点总数为 n_i 。当 n_i 为奇数时，线段 $p_{i-1}p_{i+1}$ 的 $1/k$ 点 c_i 在原多边形内，即 p_i 为凸点；否则， c_i 在多边形外，即 p_i 为凹点。特别地，若原多边形的顶点 p_1, p_2, \dots, p_n ，则此交点不计入射线 s_i 与原多边形的边在射线 s_i 上，则此 $1/k$ 点记为无效点，应取 $k = 1/(2k)$ 重复上述计算。对已确定的 k ，当上述过程已遍历多边形的每条边，若所得的 $\forall n_i$ 均为奇数，则原多边形为凸多边形；若存在 n_i 为偶数，则原多

形为凹多边形，并且过程中已记录多边形的凹点。判断凸凹性的算法如图3所示。

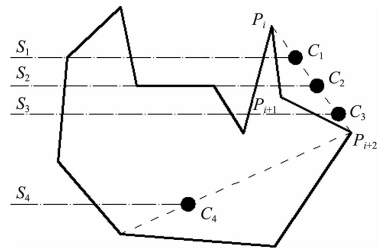


图3 判断多边形凹凸性示意

图中 C_1, C_2, C_3, C_4 为边 $p_i p_{i+2}$ 上的点，对应不同的 k 值。过 C_1, C_2, C_3, C_4 的射线 s_1, s_2, s_3, s_4 与多边形的交点总数以及多边形凸凹性的判断结果见表2。

表2 凸凹性判断

射线	交点数	凹点及多边形凸凹性
S_1	4	P_1 为凹点；凹多边形
S_2		无效点，取 $k = 1/(2k)$ 重复计算
S_3	4	P_1 为凹点；凹多边形
S_4	1	P_2 为凸点；需遍历顶点才能判断凸凹性

2.2.2 直线切割多边形

平面上任意直线可表示为

$$\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow$$

$$(y_2 - y)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_2 - x) = 0 \quad (4)$$

特别地，当直线平行于 x 轴时， $(y_2 - y) \cdot (x_2 - x_1) = 0$ 。若原多边形某条边的两个端点 $p_i(x_i, y_i)$ 、 $p_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ 满足：

$$[(y_2 - y_i)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_2 - x_i)] \cdot$$

$$[(y_2 - y_{i+1})(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_2 - x_{i+1})] > 0$$

(5)

则多边形的这条边在直线的同侧，即第 i 条边与直线无交点；否则多边形与线段有交点，交点坐标为：

$$x = \frac{(y_1 - y_2)x_1/(x_1 - x_2) - (y_i - y_{i+1})x_i/(x_i - x_{i+1}) + y_i - y_1}{(y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) - (y_i - y_{i+1})/(x_i - x_{i+1})}$$

(6)

$y =$

$$\frac{(y_1 - y_2)x_i(x_i - x_{i+1}) - (y_i - y_{i+1})x_i(x_i - x_2) + (y_i - y_1)(x_i - x_2)(x_i - x_{i+1})}{(y_1 - y_2)(x_i - x_{i+1}) - (y_i - y_{i+1})(x_i - x_2)} \quad (7)$$

对于多边形顶点序列 $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n$, 将所有交点与多边形顶点序列同方向标记, 记为 p'_1, p'_2, \dots, p'_j 。若多边形的边 $p_i p_{i+1}$ 与直线有交点 $p'_k(x_k, y_k)$, 则在原多边形中插入一个新顶点 $p_i = p'_k(x_k, y_k)$, 并且多边形顶点 $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_n$ 的角标依次加 1, 即 $p_{n+1} = p_n, p_n = p_{n-1}, \dots, p_{i+1} = p_i$ 。依次对所有交点进行上述操作后, 构成新的多边形序列 p_1, p_2, \dots, p_{n+j} 。若在 p_1, p_2, \dots, p_w 中, $p'_{k-1} = p_s, p'_k = p_t$ (即原交点 p'_{k-1}, p'_k 插入多边形后角标为 s, t) 且 $k_{\text{mod}2} = 0$, 则 p_s, p_{s+1}, \dots, p_t 构成子多边形 $D_1, p_1, p_2, \dots, p_s, p_t, p_{t+1}, \dots, p_{n+j}$ 构成子多边形 D'_1 。对 D'_1 重复上面步骤, 交点 p'_{k+1} 与 p'_{k+2} 将多边形 D'_1 分割为 D_2, D'_2 ; 交点 p'_{k+1} 与 p'_{k+2} 将多边形 D'_2 分割为 $D_3, D'_3 \dots$, 直至遍历所有交点。整个分割过程见图 4。

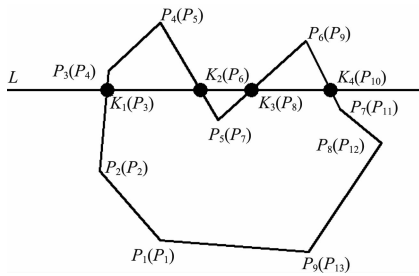


图 4 多边形分割过程

图 4 中括号外为原多边形各个顶点的编号, 括号内为编号重排后各个顶点的编号。原多边形由 P_1, P_2, \dots, P_9 围成, 被直线 L 切割后, 依次产生 K_1, K_2, K_3, K_4 共 4 个交点。原多边形各顶点的编号变更过程见表 3, 子多边形的形成过程见表 4。

表 3 分割算法顶点编号变更过程

交点变更	多边形顶点序列变更
$K_1 \rightarrow P_3$	$P_3, P_4, \dots, P_9 \rightarrow P_4, P_5, \dots, P_{10}$
$K_2 \rightarrow P_6$	$P_6, P_7, \dots, P_{10} \rightarrow P_7, P_8, \dots, P_{11}$
$K_3 \rightarrow P_8$	$P_8, P_9, \dots, P_{11} \rightarrow P_9, P_{10}, \dots, P_{12}$
$K_4 \rightarrow P_{10}$	$P_{10}, P_{11}, P_{12} \rightarrow P_{11}, P_{12}, P_{13}$

表 4 子多边形生成过程

交点	被分割多边形	产生的子多边形
K_1, K_2	D_0	$D_1 = K_1, P_4, P_5, K_2$ $D'_1 = P_1, P_2, K_1, K_2, P_7, P_8, \dots, P_{13}$
K_3, K_4	D'_1	$D_2 = K_3, P_9, K_4$ $D'_2(D_3) = P_1, P_2, K_1, K_2, P_7, K_3, K_4, P_{11}, P_{12}, P_{13}$

注: D_0 为原多边形。

经编号重排后, 原多边形由 13 个点围成, 过程中共产生 3 个子多边形, 即

$$\begin{cases} D_1 = p_3 p_4 p_5 p_6 \\ D_2 = p_1 p_2 p_3 p_6 p_7 p_8 p_{10} p_{11} p_{12} p_{13} \\ D_3 = p_8 p_9 p_{10} \end{cases} \quad (8)$$

2.2.3 计算子多边形的面积、质心

任意多边形面积与质心可以表示为:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}) \quad (9)$$

$$C_x = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1})(x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}) \quad (10)$$

$$C_y = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})(x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}) \quad (11)$$

式中: A 为面积; x_i, y_i 为顶点坐标; n 为顶点总数。

对于切割产生的子多边形 $D_i = p_1, p_2, \dots, p_u$, 若其端点 p_v 为 2.2.1 节中记录的凹点, 则连接 p_{i-1} 和 p_{i+1} , 按照式(8)~(10)计算由 $p_{v-1} p_v p_{v+1}$ 围成的三角形面积 A' (记为负值)、质心 C' 。然后去掉点 p_v , 此时多边形 D'_i 由 $p_1, p_2, \dots, p_{v-1}, p_{v+1}, \dots, p_u$ 围成。若 D'_i 仍存在凹点, 则重复上述过程。最终形成的图形面积、质心分别为 A_s 和 C_s 。则 D_i 的面积、质心按照式(12)、(13)计算。

$$A = A_s + \sum A' \quad (12)$$

$$C_{x(y)} = (A_s C_s + \sum A' C') / (A_s + \sum A') \quad (13)$$

按照上述过程求出各子多边形的面积、质心后, 可以根据水上水下结构密度的不同, 按照式(14)~(17)进行加权平均, 计算原始多边形 D_0 的面积、质心及重力作用效应, 即:

$$A_M = \sum_{i=1}^w A_i \quad (14)$$

$$C_{Mx(y)} = \sum A_i \lambda_i C_{x(y)} / \sum A_i \lambda_i \quad (15)$$

$$G = \sum A_i \rho_i g L_i \quad (16)$$

$$M = \sum G_i C_i \quad (17)$$

式中： ρ 、 g 、 L 分别为材料密度、重力加速度、结构长度。计算过程见图5。

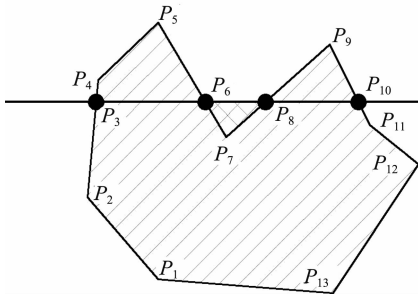


图5 计算(子)多边形的面积、质心

以第2.2.2节计算的3个子多边形为例，

$$\begin{cases} D_1 = p_3 p_4 p_5 p_6 \\ D_2 = p_1 p_2 p_3 p_6 p_7 p_8 p_{10} p_{11} p_{12} p_{13} \\ D_3 = p_8 p_9 p_{10} \end{cases} \quad (18)$$

D_1 、 D_3 不含凹点，面积、质心可以接由公式(8)~(10)求出。 D_2 含有 p_7 、 p_{11} 两个凹点，因此，依次连接 p_6 、 p_8 及 p_{10} 、 p_{12} 。按照式(9)、(10)式分别计算 $p_6 p_7 p_8$ 和 $p_{10} p_{11} p_{12}$ 的面积、质心 AS_1 、 AS_2 、 CS_1 、 CS_2 （面积记为负值）。删除 p_7 、 p_{11} 点，新形成的多边形 $D'_2 = p_1 p_2 p_3 p_6 p_8 p_{10} p_{12} p_{13}$ 中顶点全部为凸点， D'_2 的面积、质心分别为 AD_2 和 CD_2 ，则原子多边形 D_2 的面积、质心分别为 $A_2 = AD_2 + AS_1 + AS_2$ 、 $C_2 = (AD_2 \cdot CD_2 + AS_1 \cdot CS_1 + AS_2 \cdot CS_2) / A_2$ 。最后按照式(14)~(17)汇总计算 D_0 的面积、质心、重力作用效应： $A_M = A_1 + A_2 + A_3$ 、 $C_M = \sum_{j=1}^3 A_j C_j$ 、 $G = \sum_{j=1}^3 A_j \rho_j g L_j$ 、 $M = \sum_{j=1}^3 A_j \rho_j g C_j L_j$ 。

2.2.4 程序开发

根据2.2.2节的结果可以计算出重力作用效应，与其他荷载作用效应组合后，即得到稳定性指标。对上述过程，编制了计算程序。程序中使用的数据见表5。

表5 计算程序中应用的数据

种类	编号	数据名称	数据类型
输入数据	1	设计断面顶点坐标	$Point(x, y, i, flag)^1$
	2	水位线方程 $y = ax + b$	a, b
过程数据	1	交点	$insert_point(x, y, i_1, i_2)^2$
	2	凹形面积、质心	AS, CS
	3	原(子)多边形面积、质心	$A_M(AD_i), C_M(CD_i)$
	4	子多边形权重	γ_i
结果数据	1	重力作用效应	G, M_g
	2	稳定性指标	K_1, K_2, K_3^3

注：1. $flag$ 为凹点标识，凸点为0，凹点为1。
2. i_1 、 i_2 分别为交点序列中的角标，插入多边形后的角标。
3. K_1 、 K_2 、 K_3 分别为抗倾、抗滑、抗浮系数。

3 应用实例

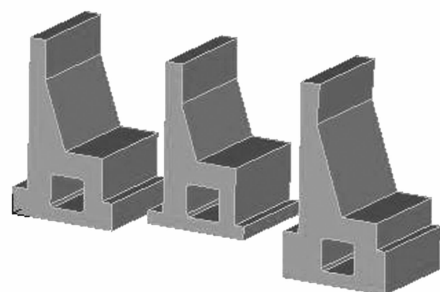
株洲二线船闸位于湘江，是政府制定的长江9级梯级开发战略中的重要工程。本文利用编制的计算程序对株洲二线船闸的闸室段进行稳定性验算。

二线船闸闸室采用钢筋混凝土分离式结构，总长280.0m，宽度34.0m，划分为2段上游过渡段、14段标准段、2段下游过渡段，各结构段长度为16.0m或19.0m。闸室墙顶高程为47.0m，底板底高程16.8~22.3m，坐落于中风化岩层上。设计时，水位及工况组合见表6。

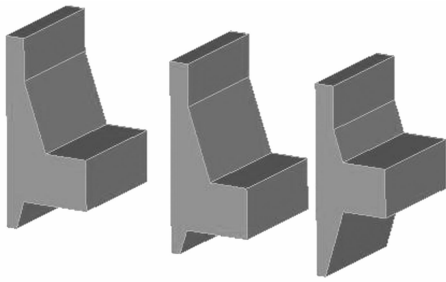
表6 工况组合

工况	闸室水位/m	墙外水位/m
闸室灌水	40.50	29.80
闸室泄水	29.80	32.00
检修	24.30	33.22
完建	填土至设计高程,墙内无水,地下水与闸底板面齐平	
施工	边墙建成,墙后为排水管水位31.00	
校核	48.16	48.16

设计中考虑了两种方案，每种方案上游、中游、下游各1种断面，总计6个断面（图6）。



a) 上游、中游、下游闸室结构段 (闸墙廊道方案)



b) 上游、中游、下游闸室结构段(闸底廊道衬砌方案)

图6 计算模型

断面1~3记为闸墙廊道方案中上、中、下游断面,断面4~6为闸底廊道衬砌式方案中上、中、下游断面。每个断面均需计算表6中的6种工况。应用编制的程序对共计36套进行稳定性计算。本文以工况1(闸室灌水)为例,其计算结果见表7。

表7 稳定性计算结果

方案	断面 编号	结构水上 面积/m ²	结构水下 面积/m ²	水上填土 面积/m ²	水下填土 面积/m ²	抗滑 系数	抗倾 系数	抗浮 系数
方案1	1	72.551	108.12	167.39	9.35	3.38	2.49	3.11
	2	84.11	69.57	143.79	8.25	3.05	2.9	3.22
	3	69.78	145.80	184.24	17.32	1.85	13.01	3.20
方案2	4	77.04	62.52	128.50	0	3.82	3.86	4.55
	5	73.74	64.86	123.20	0	2.96	2.16	4.18
	6	101.29	0.00	77.24	0	3.15	2.72	5.33

注:结构水上面积、结构水下面积、水上填土面积、水下填土面积的理论计算结果与本程序计算结果完全相同,表中不重复列出。

其中面积、质心的计算结果与理论计算结果相同,验证了方法的正确性与可行性。根据计算结果,即可以进行方案比选。从本例可以看出计算几何算法在多工况,多方案下重力式结构稳定性计算的优越性。

实际工程中,不仅船闸闸室,靠船墩、系缆墩、导航墙,海港工程中的方块码头、沉箱码头也常使用重力式结构,本文所述算法有广阔的应用空间。

4 结论

重力式结构的稳定性需要对多工况、多方案的组合进行核算,其中重力作用效应的计算繁琐费力。本文应用计算几何学进行研究,将设计条件和设计方案简化为平面多边形被任意直线的切割问题,依次研究编制了多边形的凸凹性算法、

求交算法、子多边形算法、面积和质心算法,得到了重力作用效应。该计算结果成为稳定性指标计算的初始条件。将文中的算法应用于实际工程项目,得到了稳定性计算结果。该方法实现了由平面拓扑到稳定性指标的计算,采用的数据结构简单,易于编制计算机程序,在大型项目设计或多断面比选时具有时间、空间的计算优势。并且该方法具有广泛的适用空间,可以应用于船闸、码头、系靠船等重力式结构。

当然,计算几何在智能化设计领域仍有较大的发展空间。本文只对平面问题进行了研究,实际实践中,在三维空间进行设计已初见端倪,结构断面也趋于复杂化,有时不但需要用多边形概括表示,还需要对曲线(面)结构线性化、样条化,这也正是未来研究的方向。

参考文献:

- [1] 孙学文,陈文辽.高良涧复线船闸工程设计[J].水运工程,1995(10):29-35.
- [2] 贡金鑫.港口结构抗震设计方法的发展(4)[J].水运工程,2012(9):70-73.
- [3] 张丽媛,胡昱,李庆斌,等.基于平面布尔运算的重力坝3D有限元建模[J].水力发电学报,2012,31(5):209-215.
- [4] JTS 167-2—2009 重力式码头设计与施工规范[S].
- [5] 贡金鑫,仲伟秋,赵国藩.工程结构可靠性基本理论的发展与应用(1)[J].建筑结构学报,2002,23(4):2-9.
- [6] 张丽媛,苏永生,芦志强.基于 WebGL 和有限元的码头三维设计与计算仿真[J].水运工程,2013(12):57-63.
- [7] 苏步青,刘鼎元.计算几何[J].数学进展,1981,10(1):35-47.
- [8] 陈海,王新民,焦裕松,等.一种求凸多边形宽度的优化算法[J].工程图学学报,2011,32(2):5-9.
- [9] 侯斌.简单多边形内 Euclidean 最短路径问题算法研究[D].大连:大连海事大学,2010.
- [10] 张来平,邓小刚,张涵信.动网格生成技术及非定常计算方法进展综述[J].力学进展,2010,40(4):424-447.
- [11] Hu Yu, Zuo Zheng, Li Qingbin, et al. Boolean-based surface procedure for the external heat transfer analysis of dams during construction[J/OL]. Mathematical Problems in Engineering, 2013[2014-08-01] <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2013/175616.html>.

(本文编辑 武亚庆)