



二维有限元潮流数学模型及其应用*

刘 韬¹, 朱文谨², 孙 冰¹

(1. 山东省交通规划设计院, 山东 济南 250031; 2. 淮海工学院土木工程学院, 江苏 连云港 222006)

摘要: 采用有限元 Galerkin 加权余量法对二维潮流控制方程进行求解, 建立了二维有限元潮流数学模型, 并将模型运用于计算区域较小、边界较为复杂的海安湾。对海安湾潮流数值模拟的结果如下: 计算水位和流速的大小及过程均与实测情况极为吻合, 流场的趋势也与以往研究较为一致。新模型能采用不同形式的非结构网格, 对于边界和地形变化复杂的工程区域有较强的适应性。研究成果说明, 对于计算区域较小且陆域边界变化复杂的工程问题, 采用有限元方法离散潮流方程能提高计算精度。

关键词: 有限元; 潮流方程; 控制方程; 数学模型; 潮流场

中图分类号: O 353.2

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2014)08-0024-05

Two-dimensional finite element tide mathematic model and its application

LIU Tao¹, ZHU Wen-jin², SUN Bing¹

(1. Shandong Provincial Communications Planning and Design Institute, Jinan 250031, China;

2. Huai Hai Institute of Technology Civil Engineering College, Lianyungang 222006, China)

Abstract: The 2-D tide control formula is resolved by Galerkin weighted margin method of finite element number, and the 2-D finite element mathematic model is founded and applied to Haian bay which is characterized by relative small calculation area and complicated boundary. The calculation result of tide numerical simulation for Haian bay is as follows: the numerical value and course of calculation's water level and fluid velocity are accordant with the actual situation, the trend of fluid field is coincident to the past research, the new model uses different nonstructural grids, which has stronger adaptability to the complex engineering area and boundary comparing to that by the former model. As for the engineering problems of the small calculation area and complex boundary, the research result proves that the calculation precision can be improved by the tide control formula of finite element numerical dispersing equation.

Key words: finite element; tide equation; control formula; mathematic model; tide field

潮流数值模拟的发展主要依赖于计算机技术、数值方法和网格生成等3方面因素, 数值计算结果的最终精度及计算过程的效率, 主要取决于所生成的网格及采用的算法, 只有在这两者之间有良好的匹配时才能实现流场的精确模拟。目前模拟潮流运动的数值方法主要有有限差分法、有限

元法、有限体积法、有限分析法、边界元法等^[1-2]。其中, 有限元法的基础是极值原理和剖分插值, 它吸收了有限差分的离散处理思想, 同时采用了变分计算中选择逼近函数及对任意形状(三角形或四边形)的许多微小单元进行积分处理的合理方法。根据这一特点, 若采用有限元法离

收稿日期: 2014-01-10

*基金项目: 江苏省基础研究计划(自然科学基金)青年基金项目(BK20130409); 江苏省高校自然科学研究面上项目(13KJB570001)

作者简介: 刘韬(1981—), 男, 工程师, 从事港口航道工程研究设计工作。

散潮流方程能采用不同形式的非结构网格, 对于不规则边界和地形变化复杂的计算区域有较强的适应性。

1 二维有限元潮流数学模型^[3-4]

连续方程:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(ud) + \frac{\partial}{\partial y}(vd) = 0 \quad (1)$$

式中: $d = h + \eta$ 为总水深, η 为水位, h 为水深; t 是时间; u, v 是垂线平均流速分别在 x, y 方向上的分量。

动量方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial d}{\partial x} - g \frac{\partial z_b}{\partial x} + 2v\omega \sin\phi + \\ \frac{1}{\rho d} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_{xx} d \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_{xy} d \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \zeta W^2 \cos\psi - \right. \\ \left. \frac{gu}{C_z^2 d} (u^2 + v^2)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial d}{\partial y} - g \frac{\partial z_b}{\partial y} - 2u\omega \sin\phi + \frac{1}{\rho d} \left[\frac{\partial}{\partial x} \cdot \right. \\ \left. \left(\varepsilon_{yx} d \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_{yy} d \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \zeta W^2 \sin\psi - \frac{gv}{C_z^2 d} (u^2 + v^2)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

式中: g 是重力加速度; z_b 是河床高程; ρ 是水密度; Ω 是柯氏力系数; ω 是地球自转角速度; ϕ 当地纬度; ζ 是风应力的经验系数; W 是风速; ψ 是 x 正方向与风向之间的夹角; ε_{ij} 为涡黏性系数; C_z 为谢才系数。

Galerkin 的加权余量法模型采用每边 3 个结点的三角形和四边形等参单元^[5], 即采用 Lagrange 二次插值基函数。对给定单元中的每个结点仅有一个基函数 N_i , 三角形单元有 6 个基函数, 四边形单元则有 8 个。基函数是局部坐标 ξ, η 以及结点上 ξ, η 值的函数。基函数在相应的结点上取值为 1, 而在其它结点处全部为 0。除边界结点相应的基函数外, 其余所有基函数, 都满足齐次本质边界条件。

将 Galerkin 的加权余量法直接应用于式(1), (2), (3) 得到二维有限元潮流数学模型的控制方程:

$$\sum_{j=1}^{NE} \iint_{A_e} \mathbf{M} \left[(\alpha_a d + \beta_a) + \frac{\partial}{\partial x}(du) + \frac{\partial}{\partial y}(dv) \right] dx dy = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{NE} \iint_{A_e} \left\{ \mathbf{N} \left[(\alpha_b u + \beta_b) + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial z_b}{\partial x} - \right. \right. \\ \left. \left. 2v\omega \sin\phi - \zeta W^2 \cos\psi + \frac{gu}{C_z^2 d} (u^2 + v^2)^{1/2} \right] + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \cdot \right. \\ \left. \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} - gd \right) + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon_{xy}}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} dx dy + \sum_{j=1}^{NE} \int_{S_e} \mathbf{N} g d n_x dS_e - \\ \sum_{j=1}^{NE} \int_{S_e} \mathbf{N} \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\varepsilon_{xy}}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS_e = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{NE} \iint_{A_e} \left\{ \mathbf{N} \left[(\alpha_b v + \beta_b) + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial z_b}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. 2u\omega \sin\phi - \zeta W^2 \cos\psi + \frac{gv}{C_z^2 d} (u^2 + v^2)^{1/2} \right] + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \cdot \right. \\ \left. \left(\frac{\varepsilon_{yy}}{\rho} \frac{\partial v}{\partial y} - gd \right) + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \left(\frac{\varepsilon_{yx}}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dx dy + \sum_{j=1}^{NE} \int_{S_e} \mathbf{N} g d n_y dS_e - \\ \sum_{j=1}^{NE} \int_{S_e} \mathbf{N} \left(\frac{\varepsilon_{yx}}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\varepsilon_{yy}}{\rho} \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) dS_e = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式中: α, β 是描述速度分量近似线性函数的系数; \mathbf{M}, \mathbf{N} 分别是描述水深和流速的形函数。式(5)和式(6)由于对流项的存在是非线性的。为求解该有限元矩阵方程组, 模型采用了求解非线性方程组的牛顿迭代法。

2 模型的应用

海安湾位于雷州半岛南端的中部, 地理座标为东经 $110^\circ 13' 12''$ 、北纬 $20^\circ 16' 12''$ 。海安湾为地质时期断裂凹陷出现琼州海峡时形成, 属溺谷海湾, 形似喇叭, 湾口朝南, 湾内地形复杂, 岸线不规则, 半岛、岬角较多, 用普通的四边形网格, 在边界的适应性较差, 见图 1。海安湾及近岸水域, 涨潮为西北向流, 落潮为东南向流, 湾内平均流速约 0.5 m/s。模型的固壁边界的法向通量为零, 开边界为强迫边界条件(水位控制), 岸滩边界采用干湿法。计算选用的参数为: 根据资料率定糙率 $n = 0.01 \sim 0.025$, 时间步长 $\Delta t = 0.01$ h, 露滩临界水深 $d_h = 0.03$ m, 风向为 E 向, 风速 7 m/s, 紊动扩散系数 $\varepsilon = 50 \sim 80$ m²/s。

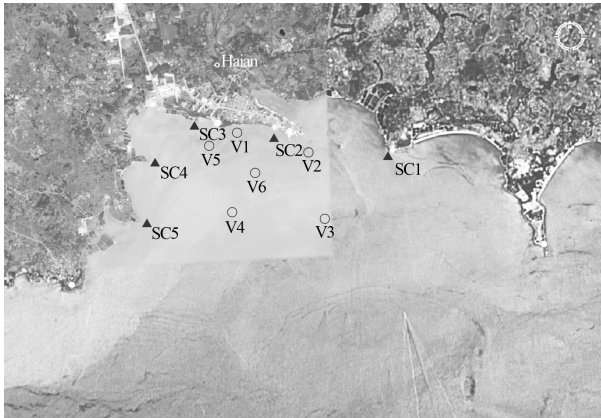


图1 海安湾海域概况及水文测站位置

2.1 水位验证

图2给出了5个水位测站(SC₁~SC₅)水位过程的计算值与实测值的比较,起算时间为2008-05-13T12:00。从图2可以看出,计算的潮位过程与实测资料是吻合的,高低潮时间的相位偏差不大于0.5 h,最高最低潮位值偏差小于10 cm。验证结果也表明海安湾内潮型复杂,采用前述的二维水流数学模型能模拟工程海区水位变化过程。

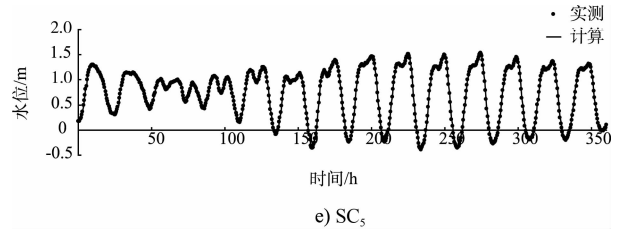
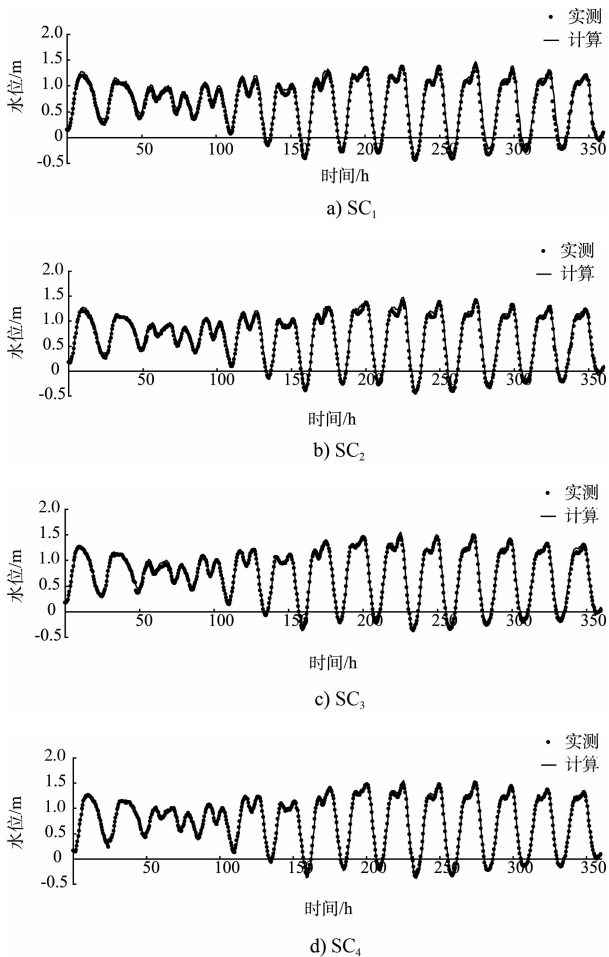
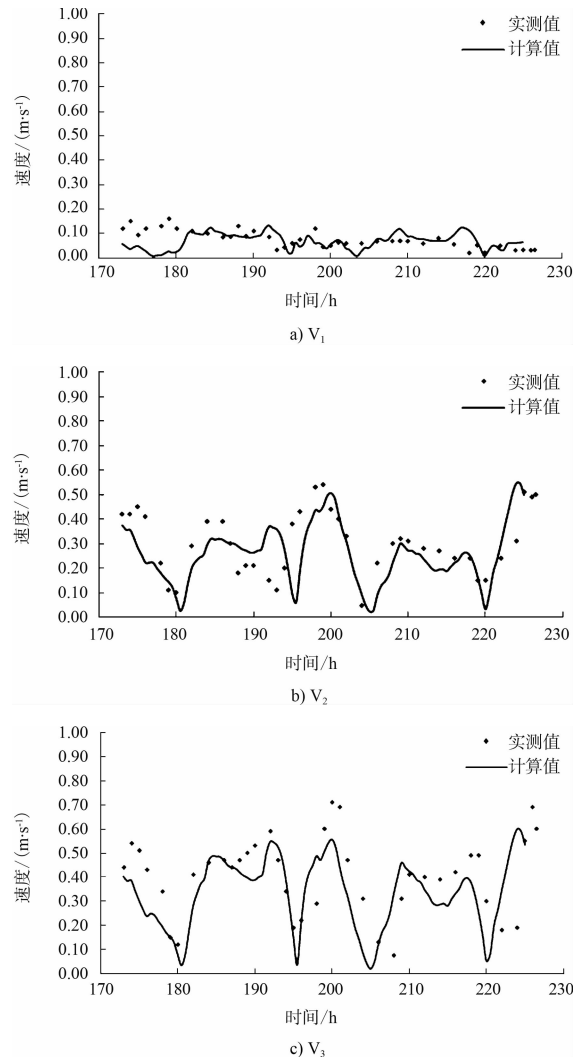


图2 水位验证图

2.2 流速验证

图3,4给出了6个测站大潮的流速计算结果与实测结果验证图,大潮段53.5 h。流向以东方向为起始方向,逆时针为正。各验证点计算流速和实测资料吻合较好,最大误差小于5%,验证结果符合文献[6]的要求。憩流时间和最大流速出现的时间偏差小于0.5 h,流速过程线的形态基本一致,涨、落潮段平均流速偏差小于10%。表明 Galerkin 加权余量法二维数学模型能模拟工程海区水流传播过程和水流运动规律。



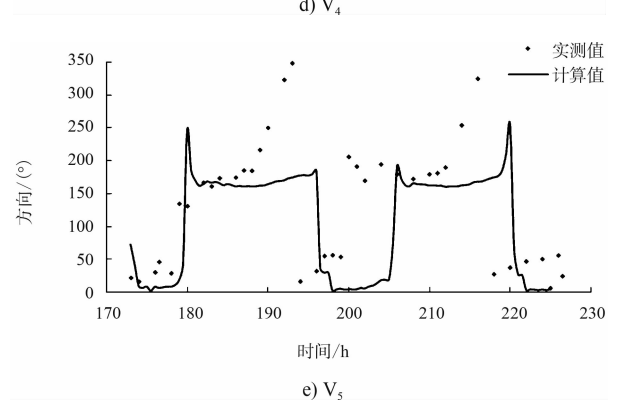
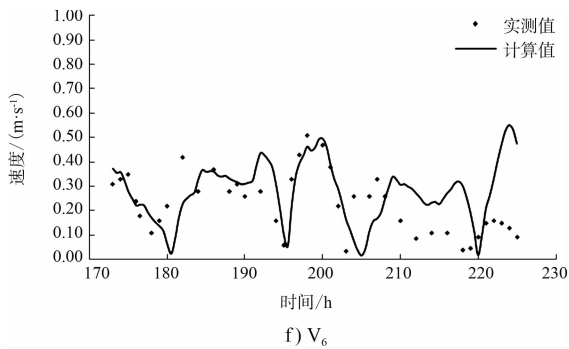
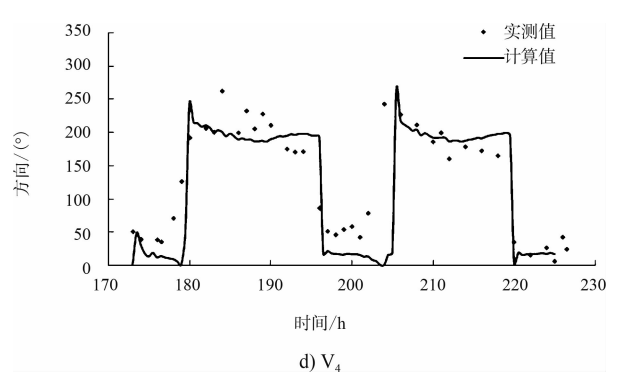
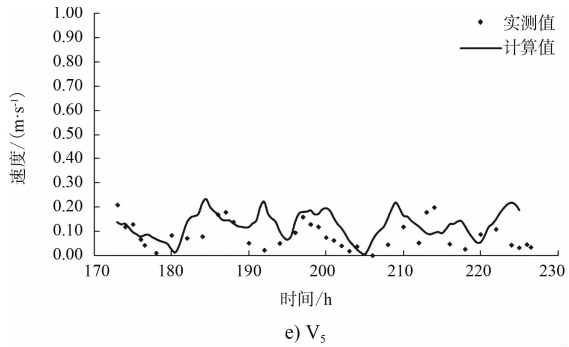
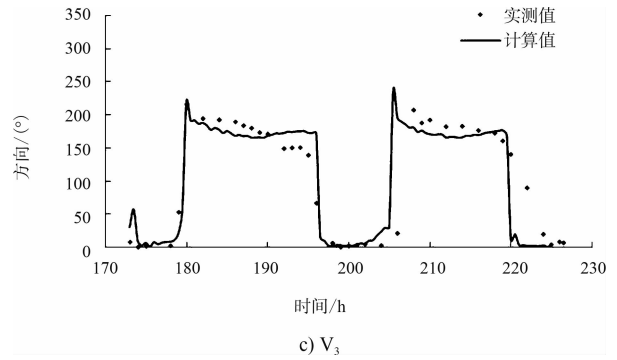
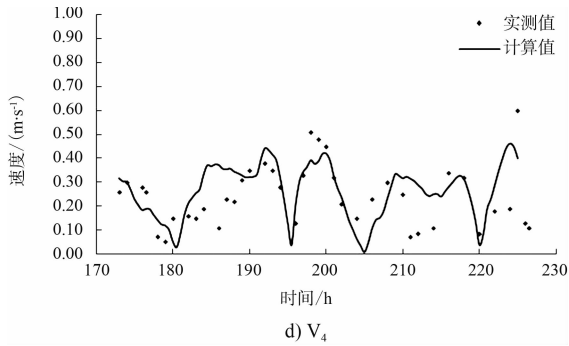


图 3 大潮流速验证

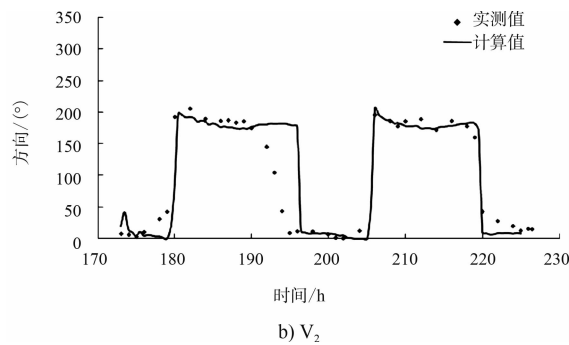
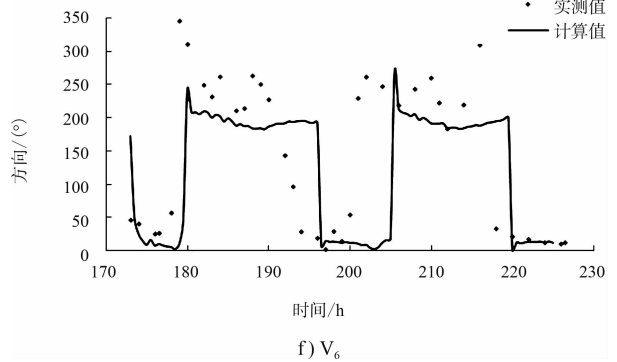
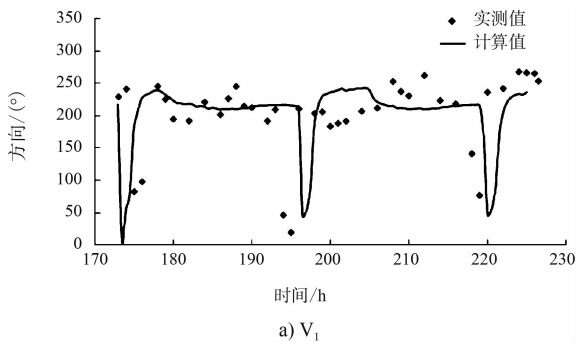
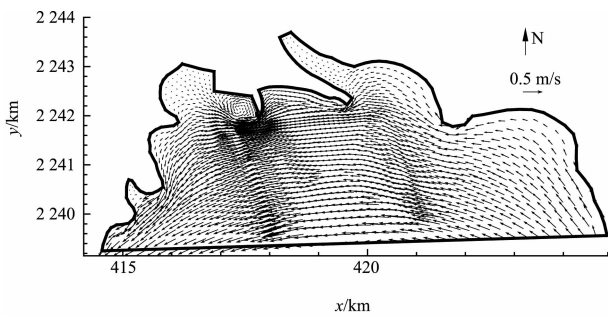


图 4 大潮流向验证

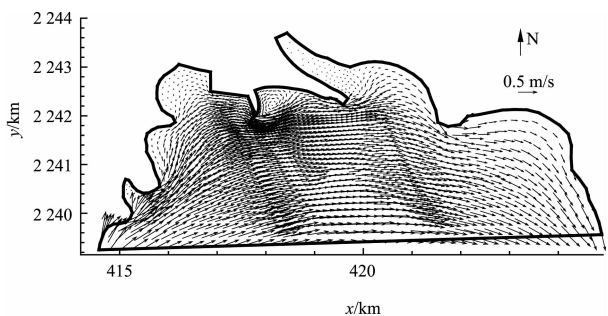
2.3 潮流场

为更清晰地了解海安湾的水流特性, 根据 Galerkin 加权余量法二维数学模型的计算结果, 绘制了海安湾海域各潮型的流场 (图 5)。海安湾因受琼州海峡东西两边的不同类型的潮波作用, 大

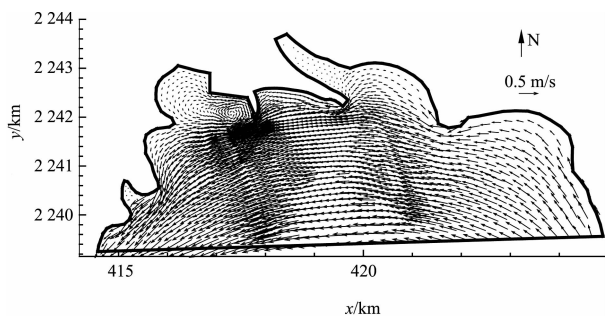
小潮潮期呈现复杂流场特征：大小潮涨潮和落潮均出现两种流态，即涨潮西向流和东向流以及落潮东向流和西向流，东西流流向基本平行于等深线；小潮潮型为半日潮，西向流的历时大于东向流的历时，东向流的平均速度大于西向流，最大流速出现在东向流，最小流速发生在转流时刻；大潮潮型为全日潮，东流平均流速大于西流平均流速，西向流历时长于东向流历时，最大流速与小潮一样也出现在东向流，这与实际情况较为吻合。



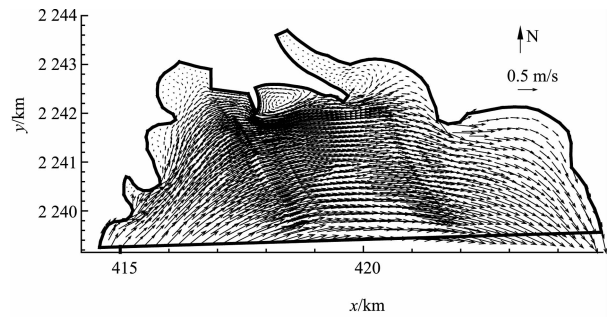
a) 涨急、小潮



b) 落急、小潮



c) 涨急、大潮



d) 落急、大潮

注：北京 54 坐标。

图5 海安湾涨急、落急流场

3 结语

1) 有限元方法中的 Galerkin 加权余量法能够较好地处理曲折的岸线，对较小海域的潮流计算能够达到较高的精度。

2) 海安湾的潮流受琼州海峡东西两边的不同类型的潮波作用，大小潮潮期呈现复杂流场特征：大小潮涨潮和落潮均出现两种流态，即涨潮西向流和东向流以及落潮东向流和西向流，东西流流向基本平行于等深线。

参考文献：

- [1] 朱文谨, 罗锋, 李瑞杰. 日照港二维潮流数值模拟[J]. 河海大学学报, 2004(S1): 264-267.
- [2] 李义天, 赵明登, 曹志芳. 河道平面二维水沙数学模型[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2001: 16-19.
- [3] 汪德耀. 计算水力学理论与应用[M]. 南京: 河海大学出版社, 1989.
- [4] 宋志尧. 平面潮流数值模拟中底床摩擦系数的修正[J]. 水动力学研究与进展, 2001(1): 56-61.
- [5] 朱文谨. 海岸黏性泥沙输运过程计算分析[D]. 南京: 河海大学, 2006: 35-49.
- [6] JTJ/T 2332—1998 海岸与河口潮流泥沙模拟技术规范[S].

(本文编辑 武亚庆)