

# 带悬锤的悬链线方程求解及其简化方法



刘涌国

(宁波中交水运设计研究有限公司, 浙江 宁波 315800)

**摘要:** 在浮码头的锚系设计中, 由于设计船型的要求, 为保证码头前沿水深, 往往需在锚链上悬挂悬锤以增加码头前沿吃水。而现行规范及文献中, 对于悬挂悬锤的锚链计算均无论述。悬锤的重力决定了码头前沿水深, 关系到码头的适用性。主要论述悬锤重力与吃水的关系以及计算方法, 确保浮码头设计的合理可靠性。

**关键词:** 浮码头; 悬锤; 水深

中图分类号: U 656.1<sup>+</sup>17

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2014)03-0103-04

## Solution of chain equation with suspension weight and simplified method

LIU Yong-guo

(Ningbo China Communications Water Transportation Design and Research Co., Ltd., Ningbo 315800, China)

**Abstract:** In the mooring design for the floating pier, in order to deepen the design depth of water, suspension weight is often needed in the anchor chain. But there is no exposition on the design of anchor chain with suspension weight, which determines the pier apron depth and relates to the adaptability of the pier. This paper mainly expounds the relationship between the suspension weight and the draft and the calculation method, to guarantee the reasonability and reliability of the floating pier design.

**Key words:** floating pier; suspension weight; water depth

浮码头的锚系设计中, 由于外锚的抛设, 浮码头的设计水深尽管较大, 但由于外抛锚链的影响, 往往真实水深由锚链来决定, 而文献[1-2]中对加悬锤的锚系水深计算未有论述, 在锚系悬锤的锤重选择上随意性较大, 有的甚至以无法计算为由不设置悬锤, 给码头使用埋下了安全隐患。

### 1 悬链线方程的推导

锚链一端受到水平预张力 $T_0$  (kN), 并在其均匀分布的自重力作用下产生下垂。设锚链水中单位重力为 $w$  (kN/m), 建立如图1所示的直角坐标系, 并设锚链曲线对应的函数为 $y=f(x)$ 。

对于横坐标上0至 $x$ 这段锚链, 长度为 $L$ , 则 $G=wL$ , 顶端拉力为 $T$ , 该力倾角为 $\theta$ , 水平张力为

$T_0$ , 根据力学原理可知,  $T$ ,  $G$ 和 $T_0$ 三力平衡。可知 $\tan \theta = G/T_0$  (图2)。

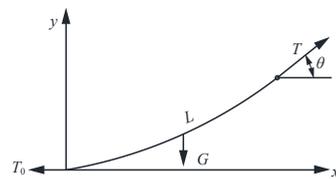


图1 锚链受力图

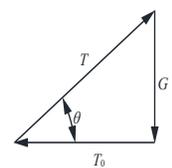


图2 力系平衡图

假定该水平张力在锚链上处处相等, 对于任意一段锚链 $L_x$ , 该平衡均成立,  $\tan \theta = \frac{wL_x}{T_0}$ , 而

$\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ , 对该式取微分, 则有

$$d(\tan \theta) = \frac{w}{T_0} d(L_x) = \frac{w}{T_0} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{w}{T_0} \sqrt{1 + \tan^2 \theta} dx \quad (1)$$

收稿日期: 2013-06-17

作者简介: 刘涌国(1973—), 男, 工程师, 注册土木工程师(港航), 主要从事港口与航道工程设计。

弧长微分  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ ，对式(1)分离变量后并积分：

$$\int \frac{d(\tan\theta)}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \int \frac{w}{T_0} dx \quad (2)$$

对式(2)积分后得到：

$$\begin{cases} \text{sh}^{-1}(\tan\theta) = \frac{w}{T_0}x + C_1 \\ \tan\theta = \text{sh}\left(\frac{w}{T_0}x + C_1\right) \\ \tan\theta = \frac{dy}{dx} = \text{sh}\left(\frac{w}{T_0}x + C_1\right) \end{cases} \quad (3)$$

对式(3)再次分离变量后，得

$$dy = \text{sh}\left(\frac{w}{T_0}x + C_1\right) dx \quad (4)$$

并积分，

$$y = \int \text{sh}\left(\frac{w}{T_0}x + C_1\right) dx \quad (5)$$

查积分公式可得：

$$y = \frac{T_0}{w} \text{ch}\left(\frac{w}{T_0}x + C_1\right) + C_2 \quad (6)$$

式(6)即为锚链悬链线的一般方程。

假设锚链末端拖地，并设拖地点为原点，则对于拖地点有， $x=0, y=0, \tan\theta=0$ ，代入式(3)和(6)，联立方程后，可解得： $C_1=0, C_2=\frac{T_0}{w}$ ，代入式(6)得：

$$y = \frac{T_0}{w} (\text{ch}\frac{w}{T_0}x - 1) \quad (7)$$

式(5)即为拖地点为原点的悬链线一般方程。

而对于悬挂点为原点的悬链线方程，仅系数有所变化，如下式表示，推导过程不再叙述。该方程对于有悬锤的悬链线更适用。 $x=0, y=0, \tan\theta=\frac{wL}{T_0}$ ，代入式(3)，(6)可解得：

$$\begin{cases} C_1 = \frac{T_0 \text{asinh}\left(\frac{wL}{T_0}\right)}{w} \\ C_2 = \frac{T_0 \cosh\left[\text{asinh}\left(\frac{wL}{T_0}\right)\right]}{w} \\ y = \frac{T_0}{w} \text{ch}\left\{\frac{w}{T_0}\left[x - \frac{T_0 \text{asinh}\left(\frac{wL}{T_0}\right)}{w}\right]\right\} - \frac{T_0 \cosh\left[\text{asinh}\left(\frac{wL}{T_0}\right)\right]}{w} \end{cases} \quad (8)$$

式(8)即是以悬挂点为原点的悬链线一般方程。 $L$ 为悬链线长度，在 $y$ 已知的情况下，根据式(7)

可求出 $x$ 值，并对曲线积分，即可求出悬链线长度 $L$ 。

## 2 带悬锤的悬链线方程

有悬锤的悬链线，受力模式和求解过程均与一般悬链线相似。区别的是其初值不同，因此只是 $C_1$ 和 $C_2$ 不同而已。

从图3可以看出，以悬锤点为界，上段悬链线中的竖向力多了悬锤重 $G_c$ 和 $L_2$ ，水平力均相同，悬锤以下段，悬链线与一般悬链线相同。

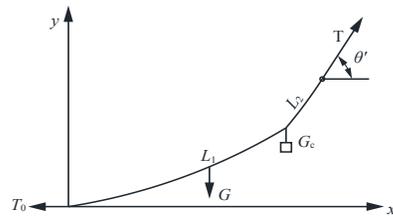


图3 带悬锤的悬链线受力图

悬挂点处初始值： $x=0, y=0$ ，且

$$\tan\theta = \frac{w(L_1+L_2) + G_c}{T_0} \quad (9)$$

式中： $G_c$ 为悬锤水下重力，实际重力应作换算。

$$y = \frac{T_0}{w} \text{ch}\left\{\frac{w}{T_0}\left[x - \frac{T_0 \text{asinh}\frac{w(L_1+L_2) + G_c}{T_0}}{w}\right]\right\} - \frac{T_0 \cosh\left[\text{asinh}\frac{w(L_1+L_2) + G_c}{T_0}\right]}{w} \quad (10)$$

以悬挂点为原点建立的悬链线方程，同样适用于锚链不拖地的情况，但悬链线方程式应通过试算来确定。式(10)即为锚链悬挂点至悬锤处的悬链线方程：

悬挂点坐标为 $x=a, y=b$ ，则悬挂点以下悬链线方程为：

$$y = \frac{T_0}{w} \text{ch}\left\{\frac{w}{T_0}\left[x - \frac{T_0 \text{asinh}\left(\frac{wL_1}{T_0}\right)}{w} - a\right]\right\} - \frac{T_0 \cosh\left[\text{asinh}\left(\frac{wL_1}{T_0}\right)\right]}{w} + b \quad (11)$$

根据式(10)和(11)，对于任意给定的 $x$ 坐标，可求出 $y$ 值，即可知任意位置的水深值。

## 3 计算实例

设锚链链径为 $\phi 56$ ，水下单位重力 $w=0.599 \text{ kN/m}$ ，水深 $-11 \text{ m}$ ，锚链悬挂点与码头前沿直线距离

10 m，悬锤距锚链悬挂点 8 m，悬锤重力 30 kN（水下重力），锚链预张力  $T_0=70$  kN，算例图示见图 4。

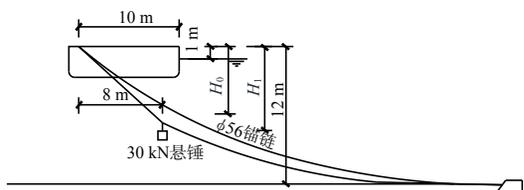


图 4 算例图示

### 3.1 未设悬锤情况

计算假设水上段锚链长度较短，为简化计算，近似按水下段处理。

将  $T_0$  和  $w$  代入式 (5)，可得以拖地点为原点的悬链线方程：

$$y = 116.86 (\text{ch}0.008\ 557x - 1) \quad (12)$$

由  $y=12$ ，可求得  $x=-52.52$  m。

通过曲线积分可求得拖地点以上锚链长度  $L=54.3$  m。

代入式 (8)，可求得以悬挂点为原点的悬链线方程：

$$y = 116.86 \text{ch}[0.008\ 557(x - 52.52)] - 128.86 \quad (13)$$

$x=10$  时， $y=-4.18$  m，扣除 1 m 干舷，实际水深为  $-3.18$  m。

### 3.2 加设悬锤后

由于加悬锤后，锚链的拖地长度会增加。引起  $L$  的减小，需采用试算法来确定。经试算得到悬锤以上段悬链线方程：

$$y = 116.86 \text{ch}[0.008\ 557(x - 88.53)] - 152.03 \quad (14)$$

(  $0 \leq x \leq 8$  )

悬锤悬挂点  $x=8$ ，得  $y=-6.31$ ，通过曲线积分得到此段锚链长  $L_2=10.19$  m。要算 10 m 处水深，还应计算悬锤以下段悬链线方程。通过计算得：

$$y = 116.86 \text{ch}[0.008\ 557(x - 44.33)] - 128.86 \quad (15)$$

(  $x > 8$  )

$x=10$  时  $y=-6.92$ ，可知，在 10 m 处悬挂水下重力为 30 kN 的悬锤后，前沿水深可由  $-3.18$  m 提高至  $-5.92$  m。

通过观察发现，悬锤以上段悬链非常接近于直线，将悬锤以下段悬链线简化为抛物线，即可

按简化方法计算，并比较两者的差别。

## 4 简化方法

简化方法把悬挂点以上视为完全直线，实际上悬链线悬挂点以上部分已接近于直线，上例中可看出直线长度与曲线长度几乎相等。悬锤点以下视为抛物线，抛物线法见文献[2]。简化法与悬链线方法不同的是，预先确定锚链悬挂点位置，从而来求得悬锤重力，如果水深不合适，再调整悬锤位置，再次求悬锤重力。下面以上例的悬锤位置来求悬锤重力，见图 5。

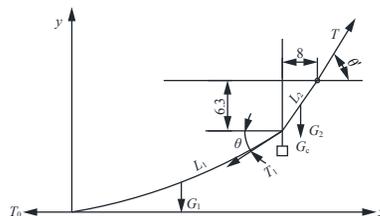


图 5 锚链受力图

对于悬锤点以下  $h=5.7$  m，为简化计算，此处假定锚链为完全拖地，锚链水平长度

$$L_1 = \sqrt{\frac{2T_0h}{w}} = 36.5 \text{ m}。$$

以悬挂点为原点的锚链抛物线方程：

$$y = \frac{(L_1 - x)^2}{L_1^2} h - h \quad (16)$$

$x=2$  时， $y=-0.61$ ， $Y=-6.91$  m，与悬链线法基本一致。 $\tan\theta = \frac{2h}{L_2} = 0.312$ ， $\tan\theta' = \frac{6.3}{8} = 0.788$ 。

根据力的平衡原理，在悬挂点建立竖向分力平衡方程：

$$T_0 \tan\theta_1 = G_c + T_0 \tan\theta \quad (17)$$

得到：

$$G_c = T_0 \tan\theta_1 - T_0 \tan\theta \quad (18)$$

计算得  $G_c=33.32$  kN。计算结果与悬链线法相比，两者相差 11.1%，经过分析可知，这是因为在简化过程中，将上段锚链简化为二力杆，忽略了上段锚链的重力，而此值是不可忽视的，通过分析上段锚链受力（图 6），可知悬锤处应有一个  $\frac{G_c}{2}$  的力。

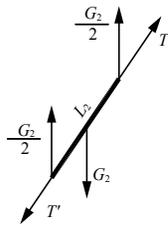


图6 上段锚链示意图

式(18)应修正为下式:

$$G_c = T_0 \tan \theta_1 - T_0 \tan \theta - \frac{G_2}{2} \quad (19)$$

计算得  $G_c = 30.27 \text{ kN}$ 。

用简化方法计算,与用悬链线法相比,仅差0.9%,完全可以满足工程需要。锚链不拖地情况

计算方法与之相近,因此不再论述。

### 5 结语

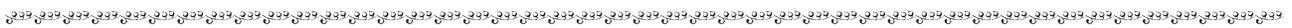
- 1) 锚链设置悬锤能有效增加设计水深。
- 2) 悬锤的设置应与锚链链径,锚链预张力及设计水深相适应。

### 参考文献:

[1] 中交第一航务工程勘察设计院. 海港工程设计手册(中)[M]. 北京: 人民交通出版社, 2001.

[2] JTJ 294—1998 浮码头与斜坡码头设计与施工规范[S].

(本文编辑 武亚庆)



(上接第87页)

### 2.3 构件截面优化结果

通过以上调整,该工程中吊车梁原造价约1 000万元,纵梁及边梁原造价约910万元,调整截面尺寸及配筋配置后,以上两项节约造价近100万元,这只是因为该舭装码头工程规模较小,如果是工程规模较大,节约的造价是相当可观的。

由此可见,用最优截面法可以获得梁截面及配筋的最佳比例,从而达到节约造价的目的。

### 3 结语

1) 通过对最优截面法的原理推导及结合工程实例的计算验证可以发现,依据现行的混凝土及钢筋价格,最优截面法对构件截面尺寸和钢筋的配置比例能找到一个最优点,也就是一个基础点,从这一点开始调整截面尺寸及配筋面积,能够起到优化设计,节约工程造价的目的。

2) 需要注意的是,构件截面尺寸调整后,会引起构件刚度变化,从而构件的弯矩也发生变化,因此需要重新计算构件弯矩值,再次代入上述公式进行计算,是一个逐渐收敛的过程。此外,除了满足正截面抗弯承载力计算外,仍需验算构件斜截面抗剪等承载力是否满足规范要求,

并考虑构件的刚度、构造要求、与其它相关构件的尺寸协调性等问题来综合决定最终的截面尺寸,要活用最优化截面法,分析出一个构件截面面积和钢筋配筋面积的倾向趋势,以计算出的配比作为调整截面的基础点。

3) 最优截面法的计算过程并不复杂,具有极强的可操作性,设计人员可以通过编制Excel表格来实现反复使用。

4) 最后还需注意,满足最小配筋率  $\rho_{\min}$  的同时,相对受压区高度  $\zeta$  应小于界限受压区高度  $\zeta_b$ ,使梁控制在适筋梁范围内,若  $\zeta$  大于  $\zeta_b$ ,则梁为超筋梁,极易发生脆性破坏<sup>[2]</sup>。

### 参考文献:

[1] 蔡吉昌. 框架梁柱截面尺寸的确定方法[J]. 山西建筑, 2010(29): 52-53.

[2] 天津大学, 同济大学, 东南大学. 混凝土结构[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997: 64-76.

[3] JTS 151—2011 水运工程混凝土结构设计规范[S].

(本文编辑 武亚庆)