



# 基于小波变换的海浪方向谱估计方法研究\*

张乐, 马玉祥, 董国海

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

**摘要:** 利用数值模拟方法分析了基于小波变换的方向谱估计分析方法的适用性, 测波阵列类型、波浪入射方向、方向集中度以及采用长度对小波方向谱估计分析方法分析结果的影响。结果表明: 小波方向谱的方法适用条件较广泛, 实用性更强。

**关键词:** 方向谱; 小波变换; 阵列类型; 时间序列长度

中图分类号: P 731.2; TV 139.2

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2013)09-0024-07

## Directional spectrum estimation of random wave based on wavelet transform

ZHANG Le, MA Yu-xiang, DONG Guo-hai

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

**Abstract:** The applicability of the estimation of the directional spectrum based on wavelet transform is discussed using the data generated from the numerical simulations. The analysis focusing on the influences of measured array types, wave incident direction, directional concentration and sampling lengths on the directional spectrum based on wavelet transform is carried out, which shows that the wavelet direction spectrum is more widely applicable.

**Key words:** directional spectrum; wavelet transform; type of array; length of time series

实际的海浪是三维的, 海浪能量是随频率和方向分布的函数, 亦即方向谱。方向谱为海洋预报、海洋遥感、上层海洋动力学、海洋工程以及近岸泥沙运动等领域的研究提供了重要依据, 因此海浪方向谱的研究具有十分重要的理论意义和工程价值。

目前, 有多种方向谱的估计方法, 如改进的最大似然法 (MMLM)、改进的贝叶斯法 (MBDM)、最大熵法 (MEP) 和直接基于傅里叶变换 (DFT) 的方法等<sup>[1-2]</sup>, 传统的估计方法都是在假定波浪场为平稳的基础上进行的。然而实际的海浪是非平稳的, 因此采用非平稳分析方法估计海浪方向谱更为准确。小波变换是

分析非平稳信号的有力工具, 近些年来在海浪分析方面得到了广泛的应用。Donelan<sup>[3]</sup>提出了基于小波变换的方向谱估计方法 (WDM), 并用其分析了实测波面, 将分析结果与MLM对比发现: WDM比MLM得到的频率方向谱更光滑, 方向上的分布更窄, 在谱峰值附近更接近真实海浪<sup>[4]</sup>。

虽然WDM方法近年来广泛应用于估计多向随机波浪的方向谱<sup>[5-6]</sup>, 但是仍然存在很多值得研究的问题, 如该方法的适用条件、计算稳定性以及该方法对不同测波阵列类型和不同波浪要素等因素的响应。因此本文采用数值方法对WDM进行深入研究, 分析该方法的实用性。

收稿日期: 2013-01-28

\*基金项目: 国家自然科学基金 (11172058)

作者简介: 张乐 (1987—), 女, 硕士研究生, 从事基于小波变换的波浪非线性研究。

### 1 多向不规则波的产生

研究中,通常采用数值模拟方法对方向谱估计方法的方向分辨率以及计算稳定性、可靠性和适用性等方面进行检验。因此准确地数值模拟多向不规则波浪非常必要。

基于线性波浪理论,多向不规则波的模拟可采用频率方向对应法<sup>[7]</sup>:将多向不规则波的波能同时分布在一定的频域和方向范围内,可把频域区间分割成 $M$ 份,方向区间分成 $J$ 份,共有 $M \times J$ 个组成单元,把每个单元的组成波看成是简谐波,则经过叠加其波列为:

$$\eta(x,y,t) = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J a_{mj} \cos(k_{mj}x \cos\theta_j + k_{mj}y \sin\theta_j - \omega_{mj}t + \varepsilon_{mj}) \quad (1)$$

式中: $a_{mj}$ 是第 $m$ 个频率,第 $j$ 个方向的入射波的振幅; $\omega_{mj}$ 是 $[m-1 \sim m, j-1 \sim j]$ 之间随机选取的圆频率; $k_{mj}$ 是波数; $\theta_j$ 是波向; $M$ 按等分频率法取100, $J$ 取60; $x, y$ 是测点的位置坐标; $t$ 是时间; $\varepsilon_{mj}$ 是入射波的初始相位,在 $[0, 2\pi]$ 之间随机选取。入射波的振幅 $a_{mj}$ 可由下式计算:

$$a_{mj} = \sqrt{2S(\omega_{mj}, \theta_j) \Delta\omega \Delta\theta} \quad (2)$$

式中: $S(\omega_{mj}, \theta_j)$ 是方向谱,圆频率 $\omega_{mj}$ 取为:

$$\begin{cases} \omega_{mj} = \omega - \frac{1}{2} \Delta\omega + (j-1 + \delta_{mj}) \frac{\Delta\omega}{J} \\ \Delta\omega = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{M} \\ \omega = \frac{\omega_{m-1} + \omega_m}{2} \end{cases} \quad (3)$$

波向 $\theta_j$ 取:

$$\begin{cases} \theta_j = \theta_{\min} + (j-0.5) \Delta\theta \\ \Delta\theta = \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{J} \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\delta_{mj}$ 为在 $[0,1]$ 内均匀选取的随机数,保证模拟所得的波浪序列不会以 $2\pi J / \Delta\omega$ 的周期重复出现,而是在同一频段内每一个方向的组成波的代表频率都不同。

方向谱的靶谱可以采用频谱与方向分布函数相乘的形式:

$$S(f, \theta) = S(f) G(f, \theta) \quad (5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(f, \theta) d\theta = 2 \quad (6)$$

在本文的数值试验中,频谱 $S(f)$ 采用改进

的JONSWAP谱<sup>[8]</sup>,而方向分布函数 $G(f, \theta)$ 采用光易型分布,采用柳淑学等给出的表达式<sup>[9]</sup>。

### 2 基于小波变换方向谱的估计原理

在信号的时-频分析中,Heisenberg测不准原则是一个无法回避的问题,小波变换可以同时兼顾时间和频率上的分辨率,是有力的非平稳信号分析工具<sup>[10]</sup>。对一时间序列 $\eta(t)$ ,小波变换可以写为:

$$W(a,b) = \int_R \sqrt{|a|} \psi_0[a(t-b)] \eta(t) dt \quad (7)$$

式中: $a$ 为母小波伸缩因子; $b$ 为母小波平移因子; $R$ 为积分空间。

在实际应用中,小波母函数的选取至关重要。在海浪分析中,Morlet小波是最被广泛应用的<sup>[11]</sup>,其表达式为:

$$\psi_0(t) = \pi^{-1/4} \exp(-t^2/2) \exp(i\omega_0 t) \quad (8)$$

式中: $\omega_0$ 是中心圆频率。

将一组时间序列 $\eta_i(t) (i=1, \dots, n)$ 作为分析的数据,下标 $i$ 代表测波点编号,对应的位置坐标为 $(x_i, y_i)$ 。分析步骤如下:

1) 求第 $i$ 个时间序列 $\eta_i(t)$ 的小波变换,可以得到在 $m$ 个离散频率上的小波变换系数 $W_{qp}^i$ ,其中 $q=1, \dots, m, i=1, \dots, n, p$ 表示离散的时间点,根据采样时间间隔决定。由于Morlet小波是解析小波,进而求得 $W_{qp}^i$ 的幅值 $|W_{qp}^i|$ 和相位 $\varphi_i$ 。

2) 确定每两个时间序列之间的相位差与其测点位置之间的关系:

$$\varphi_{ij} = kr_{ij} \cos(\theta - \alpha_{ij}) \quad (9)$$

式中: $r_{ij}$ 和 $\alpha_{ij}$ 分别表示两个测点位置之间的位移矢量 $r$ 的矢径和角度,即 $r=(r, \alpha), k=(k, \theta)$ 是在给定的频率和方向的波数矢量。可以推导出求解波数矢量的公式如下:

$$k = \left( \frac{\varphi_{12}}{r_{12}} \sin\alpha_{34} - \frac{\varphi_{34}}{r_{34}} \sin\alpha_{12} \right) / [\sin(\alpha_{34} - \alpha_{12}) \cos\theta] \quad (10)$$

$$\theta = \arctan \left[ \left( \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{34}} \frac{r_{12}}{r_{34}} \cos\alpha_{34} - \cos\alpha_{12} \right) / \left( \sin\alpha_{12} - \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{34}} \frac{r_{12}}{r_{34}} \sin\alpha_{34} \right) \right] \quad (11)$$

从而求得整个波浪场在时域和频域内的波数矢量 $k$ ,最少需要两对不同的下角标,即3个测波。

3) 将方向 $\theta$ 对应的能量 $|W_{qp}^i|^2$ 分布在整个方向范围内, 进行时间平均, 从而求得频率方向谱。

### 3 分析及结果讨论

为了研究小波变换方向谱估计方法的适用条件、准确性和分辨率, 本文通过模拟不同初始输入条件来研究影响分析结果的主要因素。分析的主要内容有: 小波方向谱对测波阵列形式、波浪主入射方向、方向集中度、采集长度等波浪模拟条件的响应以及计算稳定性。

#### 3.1 仪器阵列形式的影响

以往研究表明: 测波阵列对方向谱分析结果有很大的影响<sup>[1-2,12]</sup>。据以往方法的经验, 测波点个数宜选取 $n \geq 3$ , 并且阵列不宜直线排布。Goda<sup>[13]</sup>指出阵列中不应有间距和方位均相同的仪器对出现; 阵列中仪器对的向量距离宜在尽可能广的范围内以等密度分布; 对于不规则波, 仪器对的最小间距应小于所要分辨波浪频峰对应波长的0.3倍<sup>[8]</sup>。

因此, 本文考虑上述要求, 选取以下4种仪器阵列布置形式: 正五边型、正三角型、CERC型和十字交叉型进行分析(图1)。图1中实心点表示浪高仪,  $x$ 轴平行于建筑物的边界线,  $y$ 轴为 $x$ 轴的法线方向。

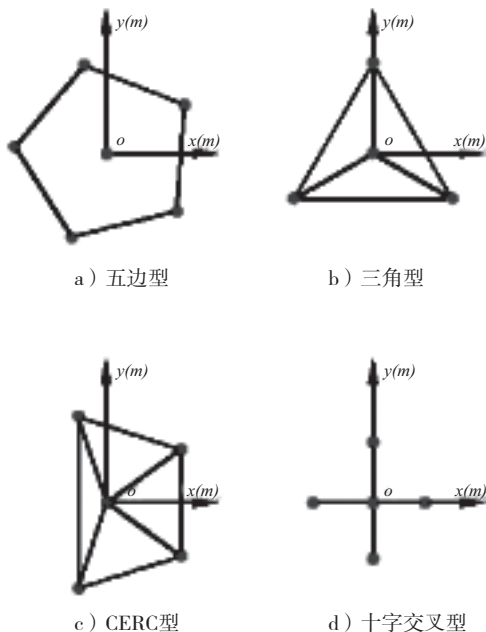
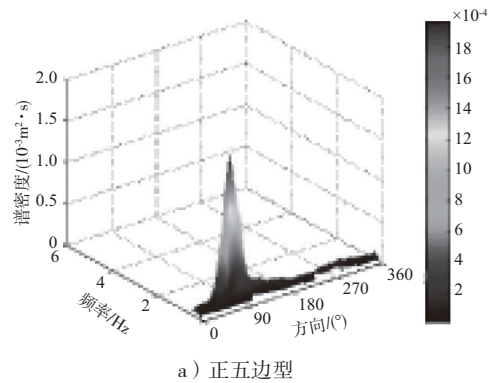


图1 仪器阵列布置形式

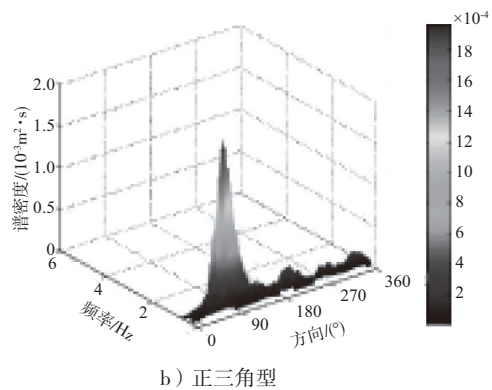
波浪模拟其它参数见表1。采用小波变换方向谱估计方法的分析结果见图2。分析结果表明, 小波方向谱对于这几种阵列, 均可以清晰地分辨出入射波的主方向, 与目标谱的分布一致。值得注意的是, 邵利民<sup>[2]</sup>指出MBDM对五边型和CERC型阵列有较好的分辨力, 而对十字交叉型的分辨力较低; MMLM只仅仅对五边形阵列有较好的分辨力, 对CERC形和十字交叉型分辨力较弱。

表1 波浪模拟参数

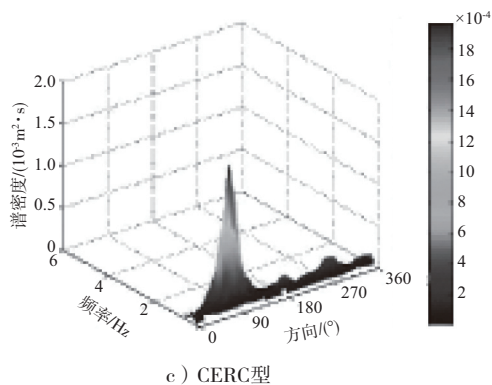
有效波高 $H_j/m$	谱峰频率 $T_p/s$	水深 $d/m$	方向集中度 $s$	采样间隔 $\Delta t/s$	样本长度 $n/点$	入射角度 $\theta(^{\circ})$
0.06	0.735	0.6	30	0.02	4 096	90



a) 正五边型



b) 正三角型



c) CERC型

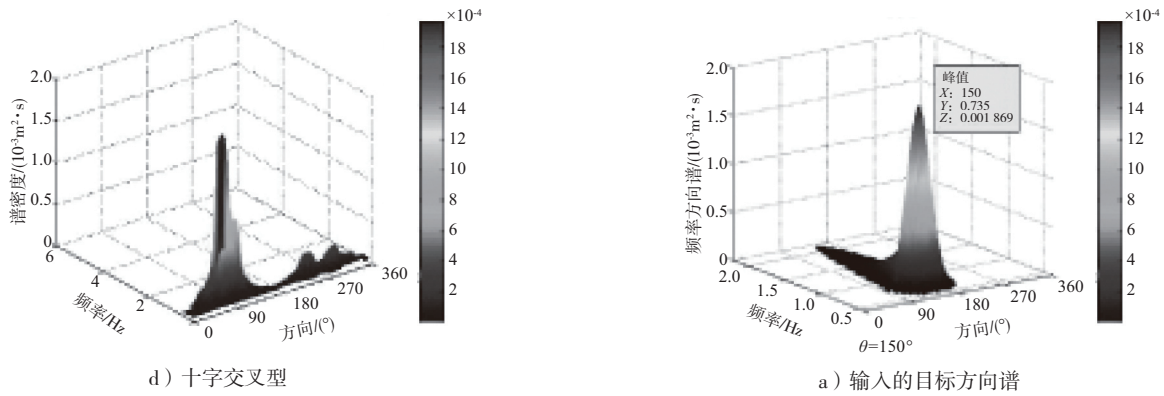


图2 不同阵列形式下小波方向谱估计结果

综上所述,小波方向谱估计方法对阵型布置不敏感,实用性更强。在本文以后的研究讨论中,模拟波列的测波仪器阵列均选取为五边型。

### 3.2 波浪主方向角度的影响

为了研究不同主波方向的估计结果的分辨能力,通过数值模拟了入射角度分别为15°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 165°共9组波浪场。除入射角度外波浪模拟其它参数见表1。

图3所示分别是主波向为30°, 90°, 150°这3个代表角度的分析结果。其它试验组次的结果与此类似,由于篇幅原因并没有在此给出分析结果。

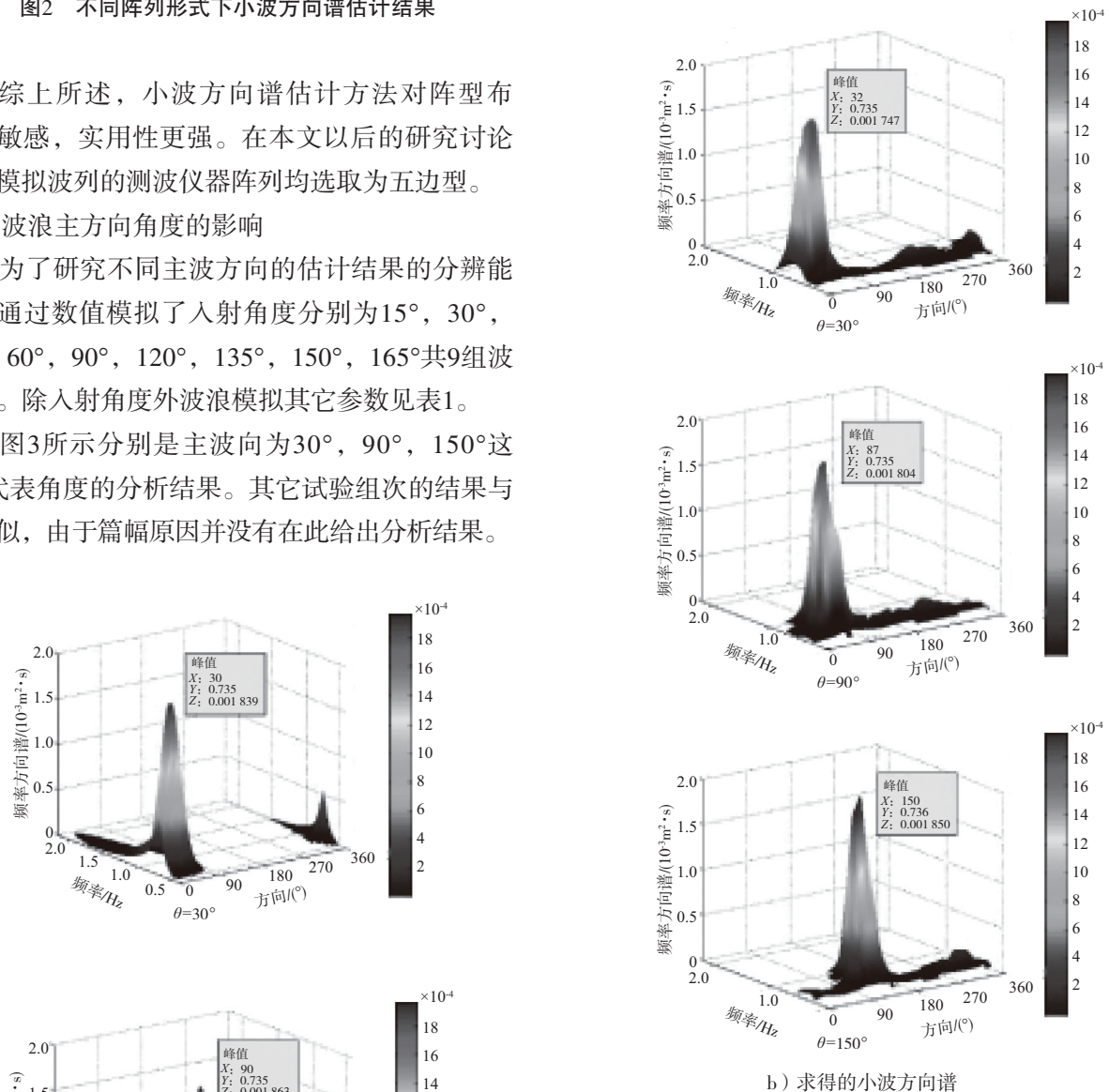


图3 不同入射角度情况下小波方向谱估计结果与目标谱的对比

分析结果表明,小波方向谱在每个角度上的方向分辨力都很好,能够充分显示出波浪的主方向和集中度,与靶谱一致。MMLM当入射角增大



时,会出现强烈的伪峰<sup>[2]</sup>。从图3可以看出,小波方向谱在入射角度越大时,计算出的方向谱主峰越位置越精确,谱也越光滑。

为了更清楚地分析方向谱的方向分布,选取15°时谱峰频率处的方向分布予以说明,如图4 a),可见计算值与理论分布基本吻合。由于集中度的影响和计算区间限制的原因,在边界处分布函数出现了中断,这一问题可以通过将计算区间由 $[0^\circ, 360^\circ]$ 转换成 $[-180^\circ, 180^\circ]$ 来解决,如图4 b)所示。因此,小波方向谱分析方法对波浪方向不敏感,实用性很强。

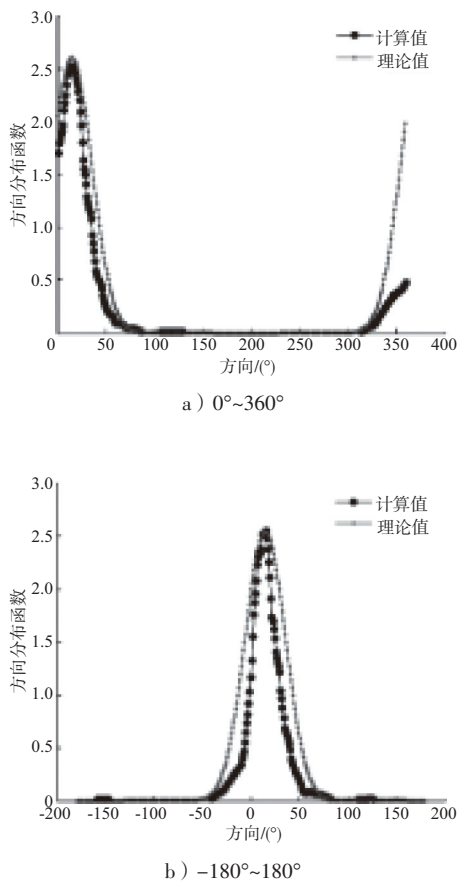
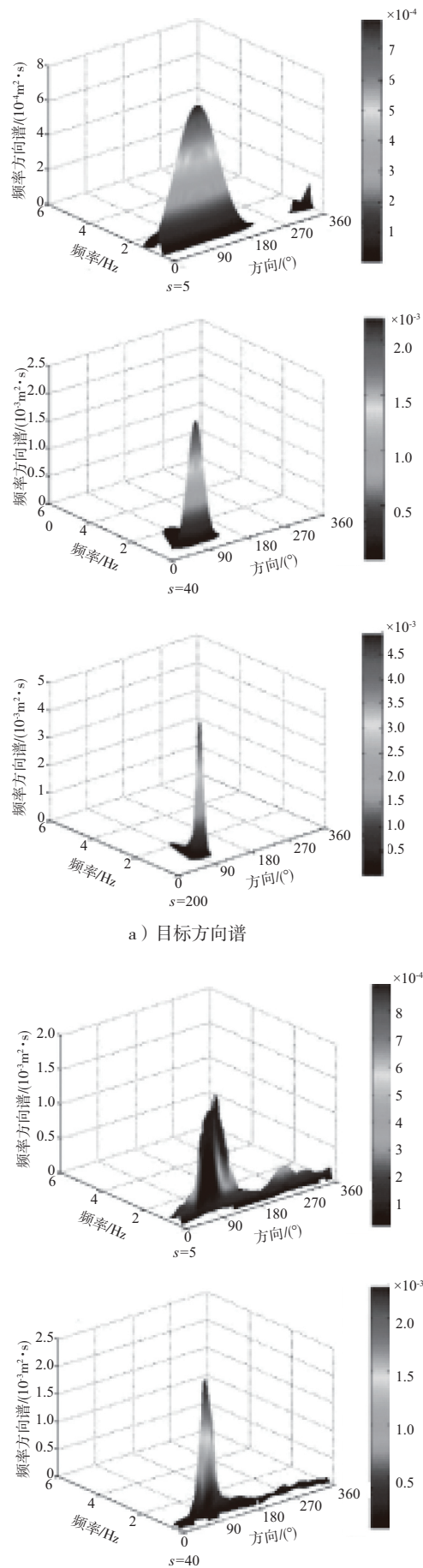


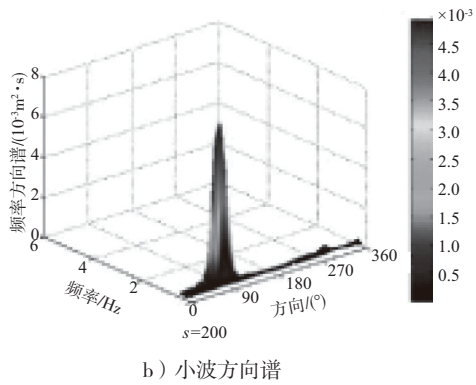
图4 方向分布函数估算结果与目标谱的对比

### 3.3 波浪方向集中度的影响

为了研究对不同方向集中度情况下的估计结果的分辨能力,通过数值模拟进行了方向集中度分别为1,2,5,10,15,20,40,50,70,100,200的试验。除方向集中度外,波浪模拟其他参数见表1。

图5所示分别是集中度为5, 40, 200时的分析结果。





b) 小波方向谱

图5 不同方向集中度情况下估算结果与目标谱的对比

试验结果表明, 方向集中度较高时, 分析结果的分辨力高。集中度大于等于20时, 方向谱的计算值和目标值相比主方向分辨力高, 集中度也相近; 当集中度小于20时, 计算谱的方向分布都会比目标谱窄。这与MMLM和MBDM的结论一致<sup>[2]</sup>。

### 3.4 采样间隔和样本长度对分析结果影响

以往研究表明采样间隔和样本长度对传统方向谱估计方法的分析结果有明显的影<sup>[12]</sup>。本节首先模拟不同采样间隔的波列来比较分析小波方向谱的实用性。为了避免折叠频率的影响, 同时 $\Delta t$ 过大时失去信息较多, 会使估计的谱变形,  $\Delta t$ 太小又会使所得序列数据间相关性增大, 因此,  $\Delta t$ 的选取应满足

$$\Delta t \leq 1/(2f_c) \quad (12)$$

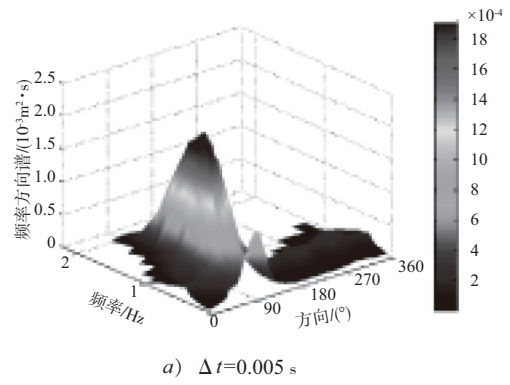
式中:  $f_c$ 为切割频率, 这里取2.5 Hz。

采用7种采样时间间隔进行分析, 分别为0.005/0.01, 0.15, 0.02, 0.04, 0.08, 0.12, 0.16 s, 对应采样波浪个数分别为17, 34, 51, 68, 137, 273, 410, 546个, 每个波的记录点数分别为240, 180, 150, 120, 60, 30, 15, 8个, 波浪模拟其它参数见表2。图6所示分别为 $\Delta t=0.005$  s和 $\Delta t=0.12$  s时的频率方向谱。

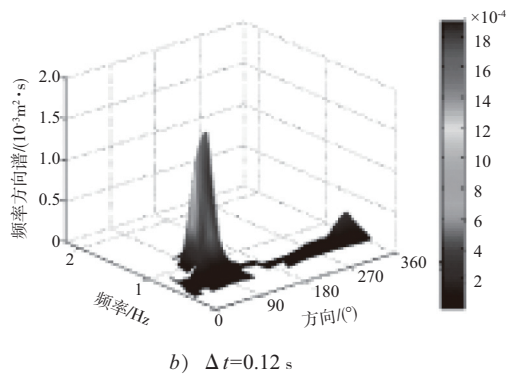
试验结果表明, 采样时间间隔在0.02~0.16 s, 记录波数在68波以上, 或者每个波的记录点数大于等于8个时, 分析方向谱的方向分辨力和集中度

表2 波浪模拟参数

有效波高 $H_p/m$	谱峰频率 $T_p/s$	水深 $d/m$	方向集中度 $s$	样本长度 $n/点$	入射角度 $\theta(^{\circ})$
0.05	0.833	0.6	40	4 096	90



a)  $\Delta t=0.005$  s

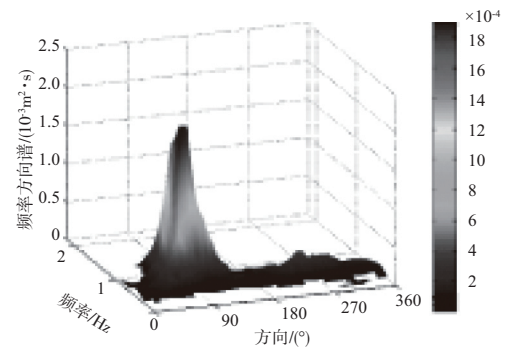


b)  $\Delta t=0.12$  s

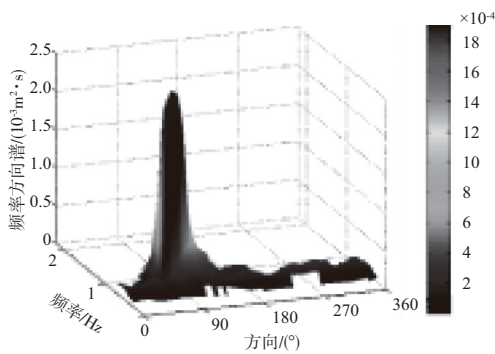
图6 不同采样间隔的频率方向谱估算结果对比

较好。当采样时间间隔小于0.02 s时, 记录波的个数小于68个, 或每个波的记录点少于8个时, 能分辨出主波向, 但是方向集中度下降, 频谱分布较宽。

其次模拟不同样本长度的波列, 比较分析结果的差别。样本长度分别取1 024, 2 048, 4 096, 8 192, 16 384, 20 480点, 对应的采样波数为17, 34, 68, 137, 273, 410, 546个。采样时间间隔由上述讨论, 选为0.02 s, 除采样长度和间隔外其它参数见表2。图7所示分别为采样长度1 024点和20 480点的频率方向谱。



a) 采样长度=1 024点



b) 采样长度=20 480点

图7 不同采样长度的频率方向谱估算结果对比

分析结果表明，这6组试验均可以分析出波浪的主方向，采样点在4 096点及以上时，其频率上和方向上的分辨力和集中度较好，采样点小于2 048点时，方向分辨力尚可，但集中度较差，方向和频率分布较宽。由此说明，当采样波数小于68个，或者每个波采样点数小于8个时，分辨能力较差。相比之下，传统的MBLM和MMLM要求波浪个数至少要达到100个波以上<sup>[2]</sup>，因此小波方向谱在采样长度上表现出了较好的优越性。

#### 4 结论

本文详细介绍了基于小波变换海浪方向谱的估计方法，并应用该方法分析了数值模拟的不同多种类型波浪场，研究了小波方法估计海浪方向谱的实用性。研究结果表明小波变换分析海浪方向谱的方法对测波阵列不敏感，适用于各种阵列；对波浪的方向不敏感，适用于各个方向的波浪；对方向集中度较敏感，适用于集中度大于20的波浪，然而对于方向分布比较分散的波浪，计算结果与理论值差异较大；该方法最少需要的采样点数较少，适用于时间序列较短的情况。

#### 参考文献:

[1] 柳淑学, 俞聿修. 方向谱的分析方法 [J]. 港口工程, 1994 (1): 25-32 .

[2] 邵利民. 入反射波浪的分离与反射系数研究 [D]. 大连: 大连理工大学, 2003.

[3] Donelan M A. A new method for directional wave analysis based on wavelets [C]. Ocean Wave Measurement and Analysis, 2001: 310-317.

[4] M A Donelan, W M Drennan, A K Magnusson. Nonstationary analysis of the directional properties of propagating waves [J]. Phys Oceanog , 1996, 26: 1 901-1 914.

[5] Harald E Krogstad, Anne Karin Magnusson, Mark A Donelan. Wavelet and Local Directional Analysis of Ocean Waves[C]. San Francisco: In Proceeding of the 16th International Offshore and Polar Engineering Conference, 2006: 66-73.

[6] Scott Nicholas, Tetsu Hara, Paul A Hwang. et al. Directionality and crest length statistics of steep waves in open ocean waters [J]. Atmos Oceanic Technol, 2005, 22: 272-281.

[7] 俞聿修, 柳淑学, 李黎. 多向不规则波生成的数值方法 [J]. 海洋学报 1992, 14(4): 143-169.

[8] 俞聿修. 随机波浪及其工程应用[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2000.

[9] 柳淑学, 俞聿修. 入、反射波浪场中方向谱额反射系数的确定 [J]. 水动力学进展: A辑, 1998, 13(3): 302-311.

[10] 马玉祥. 基于连续小波变换的波浪非线性研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2010.

[11] Grossmann A, Morlet J. Decomposition of hardy function into square integrable wavelets of constant shape[J]. Siam J Math Anal, 1984,15: 723-736.

( 本文编辑 武亚庆 )

