



悬链线公式推导及在锚链设计中的应用

刘国宝, 刘傲祥

(中交水运规划设计院有限公司, 北京 100007)

摘要: 针对现有水运规范和手册对锚链设计计算方法不足的问题, 进行理论推导和数值解决方法研究。采用悬链线理论推导方法, 得出锚链拖地形态基本曲线方程, 并进一步列出锚链不拖地情况和锚链中间有沉块情况的补充方程。结果表明, 可以采用本方法结合数学软件准确求解锚链拖地、不拖地、中间有沉块等各种工况下的曲线方程, 以及起锚角、抛锚距离、锚拉力等各参数。

关键词: 悬链线; 锚链; 沉块

中图分类号: U653.2

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2023)09-0060-05

Deduction of catenary formula and its application in anchor chain design

LIU Guobao, LIU Aoxiang

(CCCC Water Transportation Consultants Co., Ltd., Beijing 100007, China)

Abstract: In view of the shortage of calculation methods for anchor chain design in the existing water transport codes and manuals, this paper performs theoretical derivation and proposes numerical solution methods. By catenary theory derivation, the paper obtains the basic curve equation of the drag form of the anchor chain and lists the supplementary equations for anchor chains not dragging the ground and anchor chains with a settlement in the middle. The results show that this method can be combined with mathematical software to accurately solve the curve equation, anchor angle, anchor distance, anchor tension, and other parameters under various working conditions, such as anchor chain dragging, no dragging, and settlement in the middle.

Keywords: catenary; anchor chain; settlement

锚链在水运工程中广泛应用于趸船、单点系泊、浮标以及浮式防波堤等结构, 锚链系统是上述结构设计的关键技术之一。锚链自然形状为悬链线, 《海港工程设计手册》^[1]将锚链形状近似为二次抛物线; JTS 167—2018《码头结构设计规范》^[2]将锚链视为悬链线, 给出了锚链拖地情况下的计算公式。但对于锚链不拖地情况和锚链中间有沉块情况下锚链的形状, 上述资料中暂无计算方法, 本文从悬链线公式推导开始, 逐步探讨锚链拖地、锚链不拖地、锚链中间有沉块情况下锚链参数的计算方法。

1 锚链拖地情况

1.1 公式推导

锚链拖地时为一条悬链线, 如图1所示, 其底端位于原点位置, 底端切线为水平方向。此时假定 T 为悬链线顶端拉力, kN; F_H 为悬链线底端水平拉力, 等于上部结构传递到锚链上的水平力, kN; ρ 为悬链线单位长度质量(线密度), t/m; α 为链条顶部与水平夹角, rad; l 为悬链线长度, m。根据力的平衡, 对整个链条做受力分析可得^[3-5]:

$$T \sin \alpha = \rho g l \quad (1)$$

$$T \cos \alpha = F_H \quad (2)$$

收稿日期: 2022-11-23

作者简介: 刘国宝(1981—), 男, 高级工程师, 从事水运工程设计。

式(1)与(2)相除得:

$$\tan\alpha = \frac{\rho g l}{F_H} \quad (3)$$

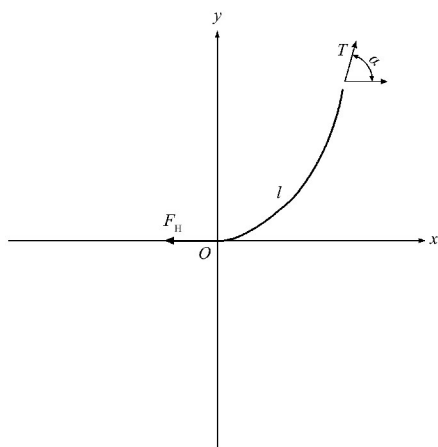


图1 锚链拖地情况悬链线形态

在悬链线上端点位置, dy/dx 为切线斜率 $\tan\alpha$, 则有:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha = \frac{\rho g l}{F_H} \quad (4)$$

悬链线长度 l 可以由以下公式求得:

$$l = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)得:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho}{F_H} \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (6)$$

令 $a = \rho/F_H$, $p = dy/dx$, 则式(6)可变换为:

$$p = a \int_0^x \sqrt{1 + p^2} dx \quad (7)$$

式(7)两边对 x 求导得:

$$\frac{dp}{dx} = a \sqrt{1 + p^2} \quad (8)$$

式(8)两边同时乘以 dx 、除以 $\sqrt{1+p^2}$ 后, 再对两边进行积分得:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} dp = \int a dx \quad (9)$$

由式(9)得:

$$\operatorname{arcsinh} p = ax + C_1 \quad (10)$$

根据图1, 当 $x=0$ 时, 锚链拖地, 因此 $p=0$, 代入式(10)可得 $C_1=0$, 因此有:

$$\operatorname{arcsinh} p = ax \quad (11)$$

即:

$$p = \frac{dy}{dx} = \sinh(ax) \quad (12)$$

对式(12)进行积分得:

$$\int dy = \int \sinh(ax) dx \quad (13)$$

则有:

$$y = \frac{1}{a} \cosh(ax) + C_2 \quad (14)$$

式(14)中, 当 $x=0$ 时, $y=0$, 因此 $C_2 = -\frac{1}{a}$,

最终求得本悬链线方程为:

$$y = \frac{1}{a} [\cosh(ax) - 1] \quad (15)$$

由式(15)可以推导得出各个参数的计算公式为:

$$x = \frac{1}{a} \operatorname{arccosh}(ay+1) \quad (16)$$

$$\alpha = \arctan \frac{dy}{dx} = \arctan[\sinh(ax)] \quad (17)$$

$$l = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2(ax)} dx =$$

$$\int_0^x \cosh(ax) dx = \frac{1}{a} \sinh(ax) \quad (18)$$

$$T = \sqrt{F_H^2 + (\rho g l)^2} = \sqrt{F_H^2 + \left(\frac{\rho g}{a} \sinh(ax)\right)^2} =$$

$$\sqrt{F_H^2 + [F_H \sinh(ax)]^2} = F_H \cosh(ax) \quad (19)$$

由上述公式可见, 在锚链下端刚好拖地, 且 F_H 和 ρ 确定的情况下, 锚链具有唯一的曲线, 在此曲线上, 若 x 已知, 则 y 、 T 、 l 具有唯一确定值^[6]。

1.2 实例计算

某趸船采用直径 81 mm 铸钢锚链, 单位长度重力与浮力差值为 1.254 kN/m, 通过荷载计算得到趸船传递到锚链上的水平力 $F_H = 1\,472$ kN, 在锚链刚好拖地的情况下, 已知水深 $y = 17.9$ m, 可采用 1.1 节公式求得水平下锚距离 $x = 204.7$ m、上端张拉角度 $\alpha = 0.173\,5$ rad、链长 $l = 205.7$ m、锚链上端拉力 $T = 1\,494$ kN。

同理, 可以计算出 17.9 m 水深、直径 81 mm 锚链末端拖地的情况下, F_H 分别为 100、500、

1 000、1 500 kN 时的锚链形态曲线,如图 2 所示(图中高度 0 m 对应水深 17.9 m)。

可见,由于拉力较大,满足下端拖地条件下,

需要的锚链较长,如下端可以选用不需要拖地的锚块,如重力式沉块,则可以采用锚链不拖地的方案减少锚链长度。

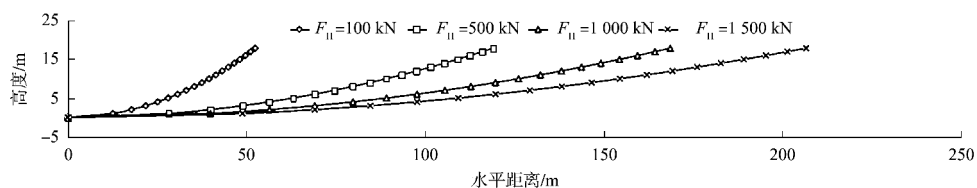


图 2 锚链拖地形态曲线

2 锚链不拖地情况

2.1 公式推导

锚链不拖地情况,悬链线如图 3 所示,锚链下端点可以假定位于拖地情况下的某曲线上一点 (x_1, y_1) 位置,其中 y_1 即为泥面的高程,锚链上端点可以视为曲线上另外一点 (x_2, y_2) 位置,求得拖地情况下的曲线方程,则可以求得各项参数。在工程中, F_H 可以通过计算船舶所受到的水平力确定, $H=y_2-y_1$ 即为水深,由此可以在已知水深 H 、锚链长度 l 、锚链单位长度质量 ρ 时求得各个未知数。

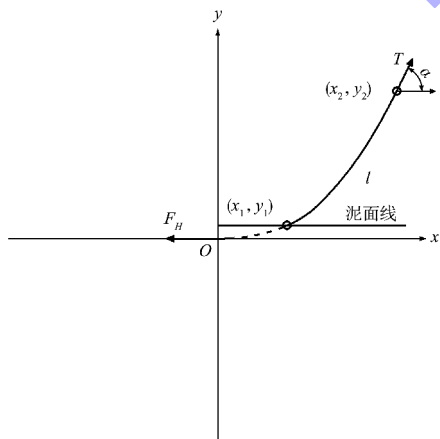


图 3 锚链不拖地情况悬链线形态

将两点坐标代入式(15)、(18),可得:

$$y_1 = \frac{1}{a} [\cosh(ax_1) - 1] \quad (20)$$

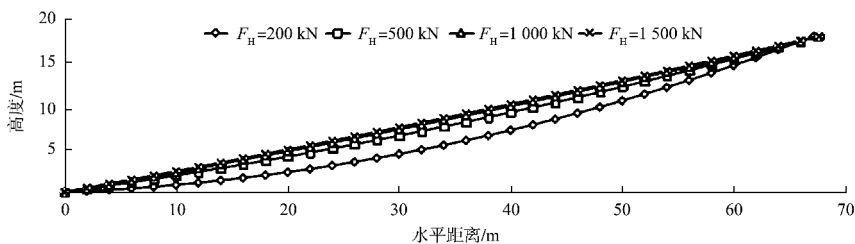


图 4 锚链不拖地形态曲线

$$y_2 = \frac{1}{a} [\cosh(ax_2) - 1] \quad (21)$$

$$H = y_2 - y_1 \quad (22)$$

$$l = \frac{1}{a} [\sinh(ax_2) - \sinh(ax_1)] \quad (23)$$

联立即可求得 x_1, y_1, x_2, y_2 , 进一步求得锚链与泥面的夹角和锚链上端张拉角度 α_1, α_2 、锚链下端和上端拉力 T_1, T_2 。此方程组求解须采用计算软件^[7]。

2.2 实例计算

以 1.2 节工程为例,如 $l=70$ m, 其他各项参数不变,则解上述方程组求得 $x_1=273.149$ m、 $y_1=31.924$ m、 $x_2=340.812$ m、 $y_2=49.824$ m, 水平下锚距离 $x=67.663$ m ($=x_2-x_1$), 根据式(17)、(19)可求得 $\alpha_1=0.231$ rad、 $\alpha_2=0.286$ rad、 $T_1=1\,512$ kN、 $T_2=1\,534$ kN。

同理,可以计算得 17.9 m 水深、长度为 70 m 的直径 81 mm 锚链末端不拖地的情况下, F_H 分别为 200、500、1 000、1 500 kN 时的锚链形态曲线,如图 4 所示(图中高度 0 m 对应水深 17.9 m)。可见,如果锚可以承受一定上拔力,则选取较短长度的锚链也是可行的,且下锚水平距离较小,适合于水域受限的区域。同时可见不拖地情况下,随锚链拉力增大,锚链形状并无太大变化,即不拖地的锚链,受力变化时顶端的位移比较小,因此受力时缓冲能力较弱。

3 锚链中间系有沉块情况

为有效减小锚所受的上拔力,经常在锚链上加设沉块,此时锚链由于受到沉块下拉力,形成两段悬链线,悬链线如图5所示。由于两段线的 F_H 和 ρ 相同,因此悬链线方程相同,但分属于两个坐标系,下段自坐标系1的 (x_1, y_1) 至 (x_2, y_2) ,上段自坐标系2的 (x_3, y_3) 至 (x_4, y_4) ,其中 (x_2, y_2) 与 (x_3, y_3) 重合,在已知水深 H 、所受水平力 F_H 、锚链单位长度质量 ρ 、锚链长度 l 、沉块下拉力 G 和沉块所挂位置情况下,可以列方程组,采用软件求得各项参数。

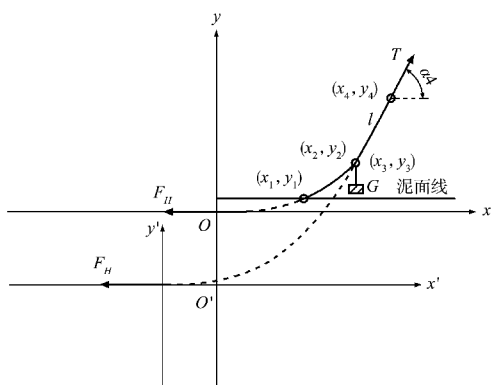


图5 锚链中间系有沉块情况悬链线形态

在2.2节案例的基础上,假定在70 m长的锚链距离上端点20 m位置,系一个下拉力为200 kN的沉块,此时 $H = y_4 - y_3 + y_2 - y_1$,可列出以下方程组:

$$\frac{1}{a} [\cosh(ax_2) - \cosh(ax_1) + \cosh(ax_4) - \cosh(ax_3)] = 17.9 \quad (24)$$

$$\frac{1}{a} [\sinh(ax_2) - \sinh(ax_1)] = 50 \quad (25)$$

$$\frac{1}{a} [\sinh(ax_4) - \sinh(ax_3)] = 20 \quad (26)$$

$$T_2 = F_H \cosh(ax_2) \quad (27)$$

$$T_3 = F_H \cosh(ax_3) \quad (28)$$

$$\tan \alpha_2 = \sinh(ax_2) \quad (29)$$

$$\tan \alpha_3 = \sinh(ax_3) \quad (30)$$

$$T_2 \tan \alpha_2 - T_3 \tan \alpha_3 = 200 \quad (31)$$

式(24)~(31)共8个方程含 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 T_2 、 T_3 、 α_2 、 α_3 等8个未知数,可求得唯一解为: $x_1 = 231.05$ m、 $x_2 = 279.88$ m、 $x_3 = 432.2$ m、 $x_4 = 450.86$ m、 $T_2 = 1\,514$ kN、 $T_3 = 1\,573$ kN、 $\alpha_2 = 0.236$ rad、 $\alpha_3 = 0.36$ rad。

同理,可以计算得出17.9 m水深、长度为70 m的直径81 mm锚链末端不拖地、在距上端点20 m位置系一个下拉力为200 kN沉块的情况下, F_H 为200、500、1 000、1 500时的锚链形态曲线,如图6所示(图中高度0 m对应水深17.9 m)。可见,沉块对拉力较小的锚链形状有所影响,但对于拉力1 000 kN以上的锚链,200 kN的沉块对其形态影响很小。

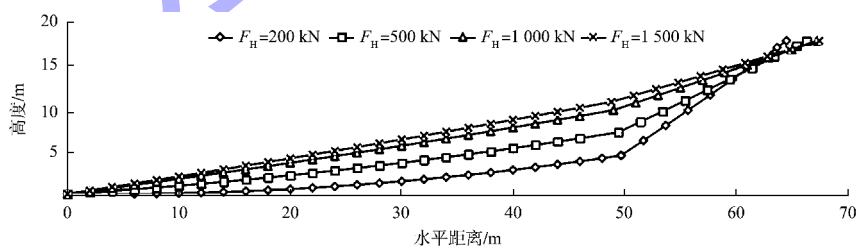


图6 锚链中间有沉块形态曲线

在受到较大拉力的锚链中,沉块如果质量较小,则对锚链形状影响有限,在此可以计算加大沉块至多大时锚链下端恰好拖地,在条件不变的情况下,用方程试算,最终得出当沉块下拉力为

2 220 kN时 $x_1 = 0$ m,此时锚链正好拖地,锚链形状如图7所示(图中高度0 m对应水深17.9 m)。可见,此时需要的锚块质量较大,通过计算得此时锚链上端拉力可达2 737 kN。

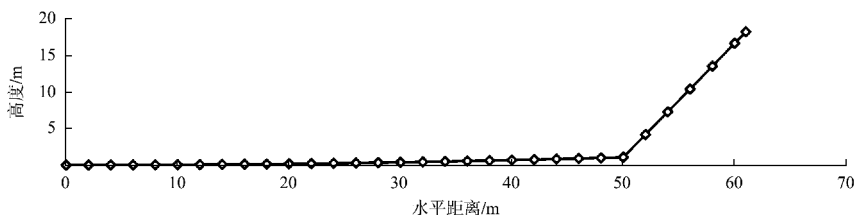


图7 锚链中间有沉块、锚链正好拖地时的形态曲线

4 结语

1) 基于悬链线理论可推导得出锚链拖地情况下其基本形状曲线方程。通过建立相关补充方程,形成方程组,可以求得锚链不拖地情况下、锚链中间有沉块情况下的各项参数,但方程组求解需要结合数学软件。

2) 锚链采用不拖地方式设计,可以节省锚链长度、减少占用水域,但会导致锚受到上拔力,且锚链的缓冲能力减弱。

3) 锚链上设置沉块后,可以有效降低锚链下端高度、减少锚链对行船的影响,但在大拉力锚链上设置沉块需要的质量很大,经济性将变差。

参考文献:

[1] 中交第一航务工程勘察设计院有限公司. 海港工程设

计手册[M]. 2版. 北京: 人民交通出版社股份有限公司, 2018.

[2] 中交第一航务工程勘察设计院有限公司, 中交第三航务工程勘察设计院有限公司, 中交四航务工程局有限公司. 码头结构设计规范 JTS 167—2018[S]. 北京: 人民交通出版社股份有限公司, 2018.

[3] 项婷婷, 王国栋. 基于悬链线理论的系泊系统的应用[J]. 合肥学院学报(综合版), 2021, 38(2): 5-10.

[4] 蒋旭, 李乡安. 不同边界条件下的悬链线确定方法[J]. 专用汽车, 2022(4): 26-28, 32.

[5] 王丹, 刘家新. 一般状态下悬链线方程的应用[J]. 船海工程, 2007(3): 26-28.

[6] 胡灵斌, 唐军. 悬链线方程的求解及其应用[J]. 船舶, 2004(1): 17-20.

[7] 钟于祥. 锚泊船舶出链长度及张力估算[J]. 淮阴工学院学报, 2004(3): 3-5.

(本文编辑 王璁)

(上接第 27 页)

[3] Faustin N E, Elshafie M Z E B, MAIR R J. Case studies of circular shaft construction in London [J]. Geotechnical engineering, 2018: 1-30.

[4] 张文雨. 圆形深竖井结构支护计算方法的研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2021.

[5] 中交第一航务工程勘察设计院. 港口工程地下连续墙结构与施工规程: JTJ 303—2003[S]. 北京: 人民交通出版社, 2003.

[6] 刘树勋. 秦皇岛港煤码头四期工程翻车机房圆形地下连续墙设计[J]. 港工技术, 1995(4): 28-35.

[7] 王卫东, 朱伟林, 陈峥, 等. 上海世博 500kV 地下变电站超深基坑工程的设计、研究与实践[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(S1): 564-576.

[8] 陈富强, 杨光华, 张玉成, 等. 圆形地下连续墙结构设计中 α 系数取值探讨[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(S1): 203-206.

[9] 崔剑峰, 胡建华, 贺伟, 等. 圆形地下连续墙的环向刚度折减效应及修正方法研究[J]. 岩土工程学报, 2017,

39(11): 2132-2138.

[10] 顾宽海, 隗祖元, 程泽坤, 等. 临水深基坑设计技术要点及应用[J]. 建筑结构, 2019, 49(S2): 910-914.

[11] 顾宽海, 刘家才, 张逸帆. 某邮轮码头后沿深厚抛石地基中的临水基坑设计[J]. 水运工程, 2018(10): 71-76, 107.

[12] ARAI Y, KUSAKABE O, MURATA O, et al. A numerical study on ground displacement and stress during and after the installation of deep circular diaphragm walls and soil excavation [J]. Computers & Geotechnics, 2007, 35(5): 791-807.

[13] 丁勇春, 顾宽海, 程泽坤, 等. 船坞坞口水基抗力学性状数值分析[J]. 水运工程, 2013(10): 34-39.

[14] 何良德, 彭天驰, 李元青, 等. 翻车机房圆形基坑支护结构受力特性分析[J]. 水道港口, 2018, 39(1): 89-95.

[15] 陈梦. 型钢-水泥土复合重力式挡墙协同工作的变形特性分析[J]. 岩土工程技术, 2021, 35(1): 7-11.

(本文编辑 赵娟)