



圆桩倾斜方向对冲淤演变影响的试验研究^{*}

于松宁, 潘新颖, 鲁友祥, 张玉良

(中国海洋大学 工程学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 恒定水流条件下, 针对向上游、下游、侧向倾斜及竖直的圆桩进行泥沙冲刷试验。采用冲刷深度-时间经验公式拟合平衡冲刷深度, 研究了不同倾斜方向桩的最大冲刷深度、冲刷淤积发展及最终的冲淤形态分布。试验结果表明: 1) 倾斜桩横向冲刷范围较小。与竖直圆桩相比, 向下游倾斜桩的最大冲深减少 16.89%, 桩后淤积长度缩短。2) 侧向倾斜桩最大冲深增加 6.92%, 冲淤形态向倾斜侧发展, 桩后淤积沙丘呈窄长型。3) 向上游倾斜圆桩的最大冲深增加 15.62%, 冲刷坑向上游发展, 桩后淤积高度最高, 纵向冲刷长度最长。

关键词: 清水冲刷; 倾斜方向; 最大冲刷深度; 冲淤形态

中图分类号: TU 473; U 656

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2022)08-0017-07

Experimental study on influence of inclined direction of circular pile on evolution of scouring and deposition

YU Song-ning, PAN Xin-ying, LU You-xiang, ZHANG Yu-liang

(School of Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: Sediment scouring experiments are conducted for upstream, downstream, laterally inclined and vertical circular piles under constant water flow conditions. The empirical equation of scour depth-time is used to fit the equilibrium scour depth, then the maximum scouring depth of piles with different inclined directions, the development of scouring deposition and the final distribution of scouring and depositing patterns are studied. The experiment results show that: 1) The lateral scouring range of the inclined pile is smaller. Compared with the vertical pile, the maximum scouring depth of the downstream inclined pile reduces 16.89%, and the depositing length after the pile is shortened. 2) The maximum scouring of the lateral inclined pile is located in the inclined direction, and its depth increases 6.92%. The scouring and depositing shape develops to the inclined side, and the depositing area behind the pile is narrow and long. 3) The maximum scouring depth of the upstream inclined circular pile increases 15.62%, and the scouring area develops upstream with the highest post-pile depositing height and the longest longitudinal scouring length.

Keywords: clear-water scour; inclined direction; maximum scouring depth; scouring and depositing pattern

桩基水下基础的泥沙冲淤是桥梁、海洋工程中结构物失稳的重要原因。为了结构的安全设计, 研究人员对桩周局部冲刷的机理及影响因素进行了大量研究, Sumer 和 Fredsøe^[1] 提出圆桩前方的马蹄涡、桩后的尾涡脱落及桩两侧的流线收

缩是清水冲刷的主要流动机制。后续学者^[2-4] 通过试验研究了稳定水流条件下单桩局部冲刷的影响因素, 包括水深、泥沙粒径、桩径、水流强度等, 并以此提出平衡冲刷深度的经验公式。由于达到平衡冲刷状态的时间过长, 许多学者^[5-7] 提

收稿日期: 2021-12-17

^{*}基金项目: 国家重点研发计划项目(2021YFB2601100); 国家自然科学基金重点项目(51739010)

作者简介: 于松宁(1997—), 男, 硕士研究生, 从事桩基泥沙冲淤研究。

通讯作者: 潘新颖(1976—), 女, 博士, 副教授, 从事河口、海岸动力学理论及其工程应用研究。E-mail: xinying@ouc.edu.cn

出了不同类型的时间尺度最大冲刷深度预测公式, 可以用较短时间的试验数据对最大冲刷深度及某一时刻的冲刷深度进行预测, 经比较, 指数型的冲刷预测公式对于时间较短试验的数据拟合效果较好。

倾斜桩能够提高结构的稳定性, 在海洋平台和海岸防波堤基础上经常应用, Sumer 等发现桩倾斜能够影响桩周围最大冲刷深度; Zhao 等^[8]量化倾斜圆桩表面的压力和剪应力, 发现倾斜通常会减少形状阻力但会增加摩擦阻力。Majd 等^[9]采用 PIV 进行倾斜桩冲刷试验时发现: 马蹄涡上游的流动分离距离随着倾角的增加而减小, 这可能是马蹄涡减弱的一个重要原因; 另外, 与竖直桩相比, 倾斜桩能够减少尾流的湍流, 但倾斜角度达到一定程度后趋势逆转。

1.2 试验材料及工况

试验选取的泥沙为中值粒径 d_{50} 为 0.657 mm 的石英砂, 比重 $s = 2.65$, 泥沙不均匀系数 $\sigma = \sqrt{d_{84}/d_{16}} = 1.33$, 为均匀沙, 泥沙休止角为 33° , 级配曲线见图 2。

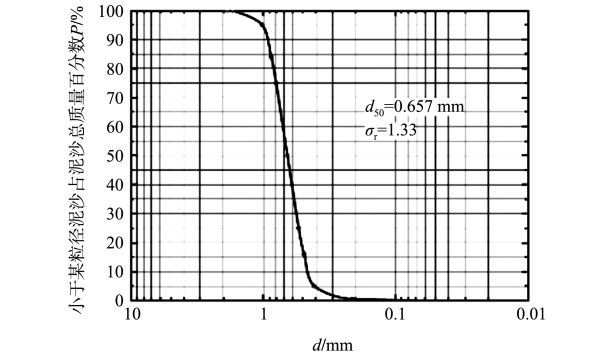


图 2 试验泥沙级配曲线

1 试验设置

1.1 试验水槽及模型

倾斜圆桩局部冲刷试验在中国海洋大学山东省海洋工程重点实验室的波流水槽中开展, 试验水槽长 60.0 m、宽 3.0 m、高 1.5 m。试验床沙布置在水槽中段, 长 12.0 m、宽 3.0 m、深 0.3 m, 沙坑尾部过渡段设置了 2 根排水管协助排水。为提高试验效率, 将水槽横向改造为 2 段, 每一段水槽宽度 $B = 1.5$ m, 可同时在隔板两侧进行模型试验。斜桩模型为直径 0.1 m 的亚克力圆管, 模型直径小于改造后试验段水槽宽度的 1/10, 可以忽略边壁效应试验结果的影响。正式试验前对隔板两侧进行流速分布验证, 结果表明隔板两侧平均流速差距在 3% 以内, 满足同时进行试验的要求。试验布置见图 1。

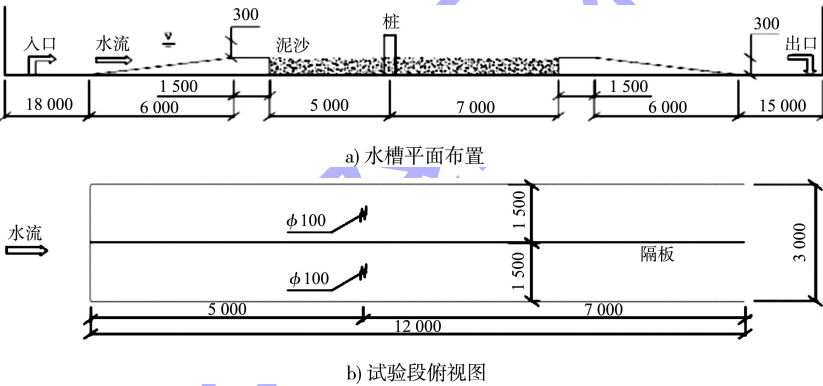


图 1 试验布置 (单位: mm)

试验泥沙的中值粒径 $d_{50} = 0.657$ mm, 水深均采用 3 倍桩径, 为 0.3 m, 水深对于冲刷的影响在本次试验中忽略不计, 试验在清水条件下进行, 水流强度 $(\theta/\theta_{cr})^{0.5} = 0.9265$, 希尔兹数 θ 为无量纲剪应力, 由下列公式进行计算:

$$\theta = \tau_0 / [\rho g (s - 1) d_{50}] \tag{1}$$

$$\tau_0 = \rho C_D U^2 \tag{2}$$

$$C_D = \{ \kappa / \ln [d_{50} / (12h)] + 1 \}^2 \tag{3}$$

式中: τ_0 为床面摩擦剪应力; ρ 为水体密度; g 为重力加速度; C_D 为拖曳力系数; U 为断面平均流速; h 为水深; κ 为卡门常数, 为 0.4。临界希尔兹数 θ_{cr} 采用下列公式进行计算:

$$\theta_{cr} = 0.30 / (1 + 1.2 D_*) + 0.055 [1 - \exp(-0.020 D_*)] \tag{4}$$

$$D_* = [g(s-1)/\nu^2]^{\frac{1}{3}} d_{50} \quad (5)$$
式中: D_* 为无量纲泥沙粒径; ν 为运动黏滞系数, 10 ℃ 下取 $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

根据不同的水力条件及结构形式完成 38 组试验, 按照圆桩倾斜方向的不同, 选取了 4 组试验作为本文研究对象, 工况见表 1。因试验原型为叉桩透空型防波堤, 试验倾斜角度选为 20°, 模型布置见图 1。

表 1 试验工况			
工况	直径 D/cm	倾斜方向 $\alpha/(\circ)$	倾斜角度 $\beta/(\circ)$
YX1	10	上游 0	20
YX2	10	侧向 90	20
YX3	10	下游 180	20
YZ	10	无	0

模型桩采用直径 $D=0.1 \text{ m}$ 、垂直高度 $h_b=0.7 \text{ m}$ 的亚克力圆柱桩, $D/d_{50}=152.2>50$, 可以消除床沙对于冲刷的影响。声学多普勒点式流速仪 (ADV) 布置在模型桩前 1.0 m、设置于 0.32 倍水深处, 用于监测试验过程中的桩前平均流速。采用 ADV 单点探底功能进行地形测量, 桩周围单点测量精度为 $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$, 桩后淤积部分测量精度适当放开。考虑到竖直桩局部冲刷的最大床面剪应力在桩侧前方出现、桩前两侧角点位置的泥沙颗粒最先起动、清水冲刷条件下桩前两侧角点处冲刷最大, 在桩侧边缘贴有刻度纸 (图 3), 记录桩侧最大冲深的变化情况。



图 3 试验模型

1.3 试验过程

设置模型桩倾斜方向, 抹平床面后缓慢加水至试验水深, 静置 10 h。试验开始后, 设置试验

流速并在控制点进行实时监控, 在冲刷速率较大段进行录像。试验前 2 h 内, 每 15 min 测量一次桩周冲淤深度和高度; 2 h 后, 每 30 min 测量一次。考虑试验效率并更好地对不同倾斜方向的冲刷形态和范围进行对比, 设置试验终止条件为桩周最大冲刷深度变化速度小于 1 mm/h , 临近平衡冲刷时停止造流, 进行最终冲刷地形的三维测量。然后缓慢排水, 对该组试验地形拍照记录并校核排水前后桩周冲淤深度和高度, 整理试验仪器, 准备下一组试验。

2 试验结果与分析

2.1 最大冲刷深度及预测

图 4 为不同倾斜方向下的圆桩桩周最大冲刷深度 d_s 随着冲刷时间 t 的变化曲线, 采用 Franzetti 等提出的冲刷深度预测公式:

$$d_s = S_0 \{ 1 - \exp [-a_1 (vt/b)^{a_2}] \} \quad (6)$$

式中: S_0 为拟合平衡冲刷深度; 两个拟合参数为 $a_1=0.028$ 、 $a_2=0.333$; v 为断面平均流速; t 为拟合时间; b 为桩的宽度。

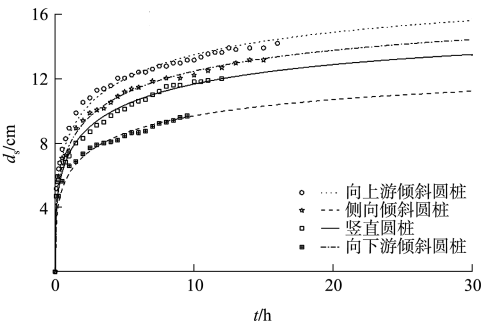


图 4 不同倾斜方向圆桩冲刷历程及拟合曲线

从冲刷历程曲线可以看出, 所有试验工况的最大冲刷深度均在最初的 1 h 内迅速增加, 此后冲刷坑范围变大、冲刷速率减慢, 最后冲刷趋于稳定。对试验数据进行经验公式延展以拟合平衡冲刷深度, 通过对不同时间尺度的冲刷经验公式进行对比, 发现上述公式对水流强度处于清水与动床冲刷临界状态时的拟合效果极佳, 拟合的结果见表 2, 用美国公路桥梁设计规范推荐的 HEC-18 公式(7)对竖直桩的最大冲刷深度进行计算, 与试验数据拟合结果适配良好。

$$y_s/y_1=2.0K_1K_2K_3(a/y_1)^{0.65}Fr_1^{0.43} \tag{7}$$

式中： y_s 为冲刷深度； y_1 为桩前水深； K_1 为桩型修正系数，取 1.0； K_2 为水流攻角修正系数，取 1.0； K_3 为床面条件修正系数； a 为桩径； $Fr_1=v/(gy_1)^{1/2}$ ，为弗汝德数。

表 2 最大冲刷深度拟合结果

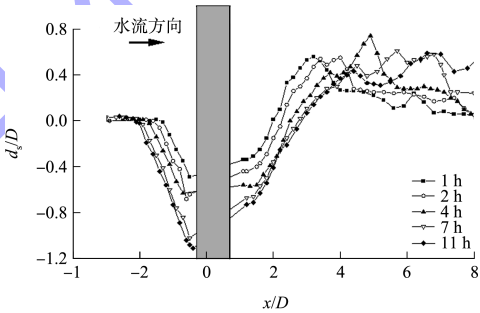
倾斜方向	拟合最大冲刷深度 d_{smax} /cm	R^2	HEC-18 公式计算结果/cm	最大冲深与直桩对比
竖直	15.75	0.985 0	15.57	—
向下游倾斜	13.09	0.988 6	—	减少 16.89%
向上游倾斜	18.21	0.988 7	—	增加 15.62%
侧向倾斜	16.84	0.995 5	—	增加 6.92%

与竖直桩相比，向下游倾斜圆桩的最大冲刷深度减少了 16.89%；侧向倾斜圆桩的倾斜侧冲刷深度增加了 6.92%；向上游倾斜圆桩的桩前冲刷最剧烈，最大冲刷深度增加了 15.62%。这与 Wang^[10] 等的数值模拟结果一致，向上游倾斜时，桩前下行水流强度增加，与泥沙作用更强烈，冲刷深度增加；向下游倾斜时，桩体更具流线型，桩前下行水流强度减弱，冲刷深度减小；侧向倾斜时，桩前下行水流的流向发生变化，在倾斜侧冲刷深度增加。

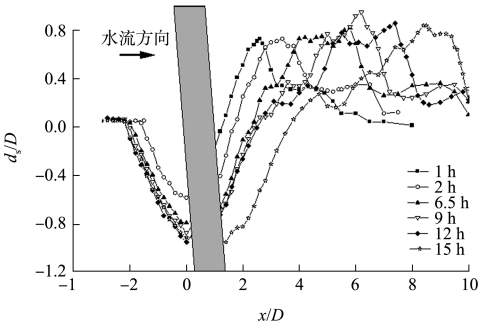
2.2 冲淤中轴纵断面发展

根据试验的终止条件，4 组工况的试验持续时间是不同的，鉴于 4 组工况的冲淤速率情况，选取特定时间的中轴线的冲淤深度和高度测量值进行对比，研究圆桩倾斜方向对冲淤纵向范围的影响，由于结构的遮挡，向上游冲刷圆桩试验的桩前中轴线数据采用桩侧的测量值代替，以满足冲刷范围的比较要求。图 5 展示了不同倾斜方向桩中轴线冲刷发展情况，所有工况均在试验前 2 h 迅速冲刷，然后冲刷速率逐渐降低，试验进行到 6~7 h 时冲刷速率基本稳定为较小值，之后冲刷坑逐步稳定达到平衡冲刷状态。桩前平衡冲刷长度均约为 2 倍桩径，由于水流强度较大，所有工况桩前冲刷坑坡角均大于泥沙水下休止角，向上游倾斜圆桩的桩前冲刷最强烈，冲刷坑坡角也最大；侧向倾斜桩中轴线桩前水流部分通过桩，中轴线下行水流与马蹄涡强度减少，故冲刷坑坡角较小；

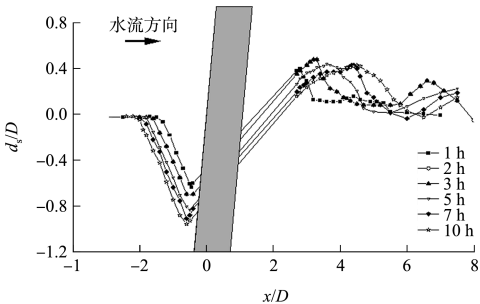
向下游倾斜工况的桩前马蹄涡分离位置更靠近桩，冲刷坑坡角较竖直桩小。桩后由于桩侧流线收缩与尾涡脱落，淤积沙丘逐渐堆积并向下游发展，高度在 7 h 前不断增大，此后淤积沙丘高度趋于稳定，持续向下游推移直至冲刷平衡状态。向下游倾斜工况桩后尾涡形成及脱落的位置较近，中轴线淤积段最靠近桩体，淤积最高点出现在桩后 4.5D 处，淤积沙丘略高于竖直桩；向上游倾斜工况桩前冲刷剧烈，泥沙被搬运到下游，桩后淤积最高；侧向倾斜桩中轴线前冲刷剧烈，泥沙被搬运到下游，桩后淤积最高；侧向倾斜桩中轴线部分水流通过，桩后泥沙持续向下游输移，淤积最高点出现在桩后 9.5D 处，由于水流状况较复杂，淤积长度较长、淤积高度介于下游倾斜桩和上游倾斜桩之间，纵向中轴线冲淤情况见表 3。



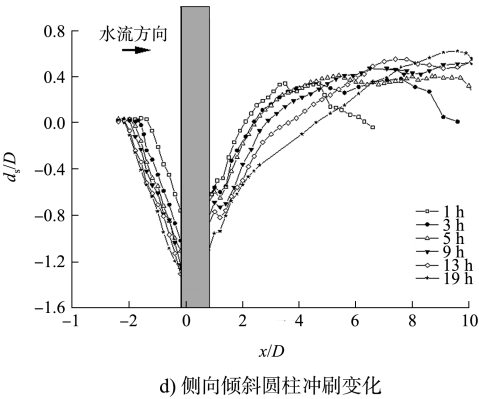
a) 竖直圆桩冲刷变化



b) 向上游倾斜圆桩冲刷变化



c) 向下游倾斜圆桩冲刷变化



d) 侧向倾斜圆柱冲刷变化

图 5 不同倾斜方向桩中轴线冲刷历程

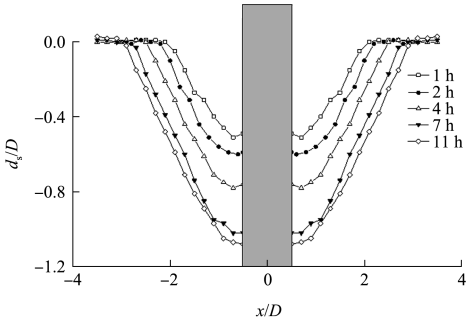
表 3 纵向中轴线冲淤情况对比

倾斜方向	桩前冲刷坑 坡角/(°)	中轴线桩后淤 积最高点位置	中轴线桩后淤 积最高点高度
竖直	36.87	7.0D	0.43D
向下游倾斜	35.84	4.5D	0.48D
向上游倾斜	37.56	8.5D	0.84D
侧向倾斜	34.22	9.5D	0.62D

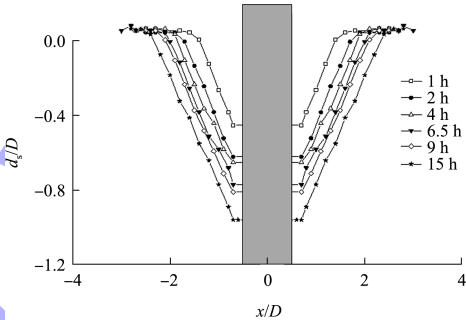
2.3 冲刷特征横断面发展

根据试验测试结果, 选取特定时间特征横断面冲刷深度的测量数据, 研究圆桩倾斜方向对横向冲刷范围的影响。从图 6 可以看出, 竖直桩的横向冲刷范围和发展速度都是最大的; 向上游和下游倾斜桩的横向冲刷范围略有减小; 侧向倾斜桩的冲刷向倾斜侧发展, 非倾斜侧冲刷坑较浅, 倾斜侧冲刷深度约为非倾斜侧的 1.5 倍。Kitsikoudis 等^[11]在做向下游倾斜桩试验时发现, 随着桩倾斜, 流向和横向的湍流强度都减小, 这可能是斜桩纵向和横向冲刷范围都减小的一个重要原因; 另外, 在大斜度桩的情况下, 流线收缩效应明显减小, 表明向下游倾斜使桩更具流线型。表 4 为试验的横向冲刷坑坡角, 结果表明: 不仅向下游倾斜使桩两侧冲刷范围减小, 向上游和侧向倾斜均可以减弱桩两侧的流线收缩, 进而降低桩两侧的冲刷速率和程度。竖直桩侧、横向冲刷范围最大, 冲刷坡角最小, 表征桩侧流线收缩导致的冲刷最强; 向上游倾斜工况的桩侧冲刷最弱; 对于侧向倾斜桩, 桩侧的水流方向发生变化, 倾斜侧水流向下偏移, 非倾斜侧上移, 导致桩两侧冲刷不对称, 两侧冲刷坡角相差 2°;

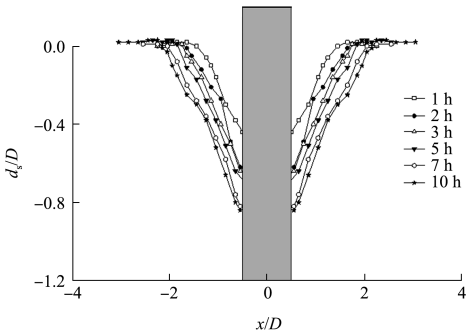
向下游倾斜工况的桩侧冲刷强度介于侧向倾斜桩的倾斜侧与非倾斜侧之间。



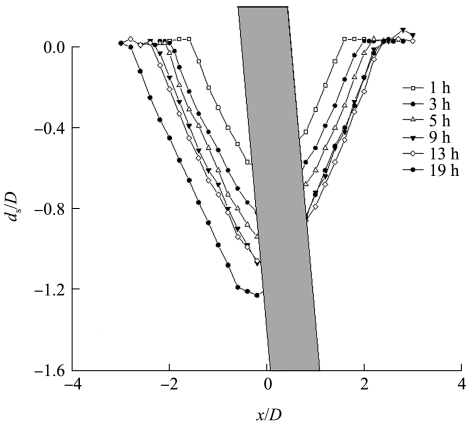
a) 竖直圆柱冲刷范围变化



b) 向上游倾斜圆柱冲刷范围变化



c) 向下游倾斜圆柱冲刷范围变化



d) 侧向倾斜圆柱冲刷范围变化

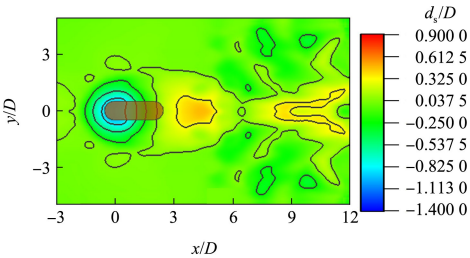
图 6 特征横断面冲刷范围变化

表 4 横向冲刷坑坡角

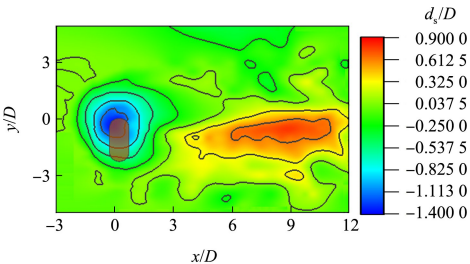
倾斜方向	横向冲刷坑坡角/(°)
竖直	26.57
向上游倾斜	30.96
侧向倾斜侧	27.42
侧向非倾斜侧	29.68
向下游倾斜	28.81

2.4 最终冲淤地形

采用试验测量的数据绘制了不同倾斜方向桩的最终冲淤地形三维云图，见图 7。所有试验工况的桩前冲刷坑都存在一个较短的平坦区域，可能是经过长时间冲刷的发展，在紧靠桩前的部分形成了一个与马蹄涡反向的新的的小旋涡，导致该位置附近的泥沙无法被马蹄涡卷向上游，形成了一段平坦的区域。侧向倾斜桩的冲刷坑形态向倾斜侧偏移，桩后淤积在轴线附近最高，但分布向桩倾斜侧发展，淤积沙丘呈现窄长型而不是其余 3 种工况的宽短型，非倾斜侧有不连续的冲刷坑存在；竖直桩和向上倾斜桩的冲刷形态类似，冲坑为椭圆形，冲淤地形对称分布，桩后淤积中间高、两边低，桩后淤积沙丘最高点后少有泥沙补给，沙丘高度迅速降低，在桩周冲刷坑之外，存在不连续的小冲刷坑，上游倾斜桩冲刷坑向上游偏移；向下游倾斜桩冲刷范围减小，冲淤地形沿桩中轴线对称分布，桩后淤积沙丘最高点后出现较明显断层，断层后中轴线淤积高度较低，沿中轴线两侧呈条带形分布。



c) 向下游倾斜桩



d) 侧向倾斜桩

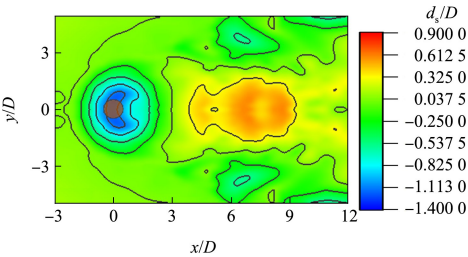
图 7 最终冲刷地形云图

3 结论

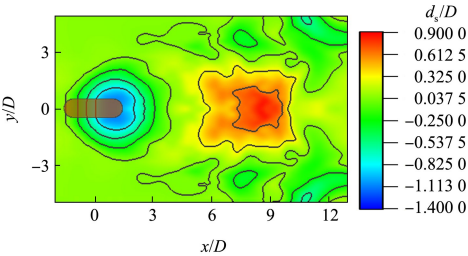
1) 清水冲刷条件下，竖直及轴向倾斜圆桩的最大冲刷深度在桩两侧前方取得，侧向倾斜桩的最大冲刷深度位于倾斜侧，采用时间尺度预测公式拟合得到的竖直桩平衡冲刷深度与 HEC-18 公式计算结果吻合。

2) 与竖直桩相比，向下游倾斜圆桩的最大冲深减小 16.89%，侧向倾斜桩的最大冲深增大 6.92%，向上游倾斜桩的最大冲深最大，比竖直桩增大 15.62%。4 种工况桩前冲刷坑坡角均大于泥沙休止角 33°，侧向倾斜桩中轴线冲刷坑坡角最小，其余工况桩前冲刷坑坡角排序与最大冲刷深度相同。

3) 桩的倾斜会显著改变冲淤形态，圆桩向上游倾斜时，桩前发生更剧烈的冲刷，桩后淤积最高点向下游推移至桩后 8.5D 处，淤积高度最高；对于向下游倾斜的圆桩，桩前冲刷强度减小，桩后淤积最高点在 4.5D 处，冲淤长度最小，向上游和向下游倾斜桩的横向冲刷范围均小于竖直桩；桩身两侧的流线收缩对局部冲刷有很大影响，侧向倾斜桩的冲刷坑和淤积沙丘均向倾斜侧发展，倾斜侧最大冲刷深度为非倾斜侧的 1.5 倍，两侧横向冲刷坑坡角相差 2°，淤积最高点在桩后 9.5D



a) 竖直桩



b) 向上游倾斜桩

处, 轴向冲刷长度最长, 其余 3 组试验的冲淤形态沿桩中轴线对称分布。

4) 值得注意的是, 试验所得结果仅限于恒定水流下的清水冲刷, 且在水流流速接近泥沙起动流速的条件下, 对于其他水流状态或泥沙条件, 在工程应用中应当妥善考虑。

参考文献:

[1] SUMER B M, FREDSTØE J. The Mechanics of Scour in the Marine Environment[M]. Singapore: World Scientific Pub Co Inc, 2002.

[2] MELVILLE B W, SUTHERLAND A J. Design method for local scour at bridge piers[J]. Journal of hydraulic engineering, 1988, 114(10): 1210-1226.

[3] RAUDKIVI A J, ETTEMA R. Clear water scour at cylindrical piers[J]. Journal of hydraulic engineering, 1983, 109(3): 338-350.

[4] MELVILLE B W, CHIEW Y M. Time scale for local scour at bridge piers[J]. Journal of hydraulic engineering, 1999, 125(1): 59-65.

[5] Sumer B M. The mechanics of scour in the marine environment[M]. Singapore: World Scientific, 2002.

[5] MUNK W H, SARGENT M C. Adjustment of Bikini Atoll to ocean waves[J]. Eos transactions American geophysical union, 1948, 29(6): 855-860.

[6] NELSON R, LESLEIGHTER E. Breaker height attenuation over platform coral reefs[C]//1985 Australasian Conference on Coastal and Ocean Engineering. Barton: Institution of Engineers, Australia, 1985.

[7] DEMIRBILEK Z, NWOGU O G, WARD D L. Laboratory Study of wind effect on runup over fringing reefs[R]. New York: Engineer Research and Development Center, 2007.

[8] 梅戉, 高峰. 波浪在珊瑚礁坪上传播的水槽试验研究[J]. 水道港口, 2013, 34(1): 13-18.

[9] 陈松贵, 王泽明, 张弛, 等. 珊瑚礁地形上直立式防浪堤越浪大水槽实验[J]. 科学通报, 2019, 64(Z2): 3049-3058.

[10] 王良才, 陈永平, 胡玉植. 基于 SWASH 模型的近岸波浪传播变形数值模拟[J]. 水利水运工程学报, 2015(2): 26-32.

[11] STELLING G, ZIJLEMA M. An accurate and efficient

[6] Soulsby R. The mechanics of scour in the marine environment[J]. Coastal engineering, 2003, 51(1): 101-102.

[7] Scientific, 2002 FRANZETTI S, LARCAN E, MIGNOSA P. Influence of tests duration on the evaluation of ultimate scour around circular piers[C]// Proceedings of international conference on the hydraulic modeling of civil engineering structures. Coventry: BHRA fluid engineering, 1982: 381-396.

[8] ZHAO M, CHENG L, ZANG Z P. Experimental and numerical investigation of local scour around a submerged vertical circular cylinder in steady current[J]. Coastal engineering, 2010, 57(8): 709-721.

[9] MAID S F, YAGCI O, KIRCA V, et al. Flow and turbulence around an inclined pile[C]// The Twenty-sixth (2016) International Ocean and Polar Engineering Conference. [s.l.]: International Ocean and Polar Engineering Conference, 2016.

[10] WANG S H, YANG S Y, HE Z G, et al. Effect of inclination angles on the local scour around a submerged cylinder[J]. Water, 2020, 12(10): 2687.

[11] KITSIKOUDIS V, KIRCA V S O, YAGCI O, et al. Clear-water scour and flow field alteration around an inclined pile[J]. Coastal engineering, 2017, 129: 59-73.

(本文编辑 武亚庆)

(上接第 16 页)

finite-difference algorithm for non-hydrostatic free-surface flow with application to wave propagation[J]. International journal for numerical methods in fluids, 2003, 43(1): 1-23.

[12] ZIJLEMA M, STELLING G S. Efficient computation of surf zone waves using the nonlinear shallow water equations with non-hydrostatic pressure[J]. Coastal engineering, 2008, 55(10): 780-790.

[13] RIJNSDORP D P, SMIT P B, ZIJLEMA M. Non-hydrostatic modelling of infragravity waves under laboratory conditions[J]. Coastal engineering, 2014, 85(3): 30-42.

[14] 陈树彬, 陈松贵, 姚宇, 等. 珊瑚礁海岸波浪运动特性整体物理模型实验研究[J]. 海洋学报, 2021, 43(5): 110-119.

[15] 邹国良, 张庆河, 张娜. 基于非静压方程的波浪破碎模拟[J]. 上海交通大学学报, 2016, 50(3): 437-442.

[16] 吴辰. 基于非静压方程的斜坡堤越浪数值模拟研究[D]. 天津: 天津大学, 2014. (本文编辑 郭雪珍)