



# 透水性碎石丁坝绕流及块体受力的数值模拟

李有为

(长江航道规划设计研究院, 湖北 武汉 430040)

**摘要:** 碎石丁坝常用于河道的水流调控, 其水动力学特征是评估工程效应的重要依据。流固耦合数值模型可有效地用于模拟相关的水动力学过程, 描述其力学特征。建立了带自由表面多孔介质水流模型和离散单元法相耦合的 CFD-DEM 数值模型, 并依据试验数据对模型进行有效性及模拟精度的验证。利用该数值模型开展碎石丁坝绕流的数值模拟, 研究结构透水性对局部流动和碎石体受力的影响。研究结果表明: 1) 随着丁坝透水性的增强, 尾流区沿流向延长。2) 不同坝体透水性条件下的主流区及尾流区的速度分布有明显的差异, 但尾流区内的剪切流速的分布具有一定的相似性。3) 丁坝结构受力分析显示, 随着坝体透水性的增强, 块体受力区域由坝头向坝身蔓延、受力区面积逐渐增大。

**关键词:** 碎石丁坝; 绕流特性; 结构受力; CFD-DEM(计算流体动力学和离散单元法)耦合模型; 自由表面水流

**中图分类号:** U 656.3

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1002-4972(2021)11-0098-07

## Numerical simulation of flow around permeable rubble spur dike and blocks stress distribution

LI You-wei

(Changjiang Waterway Planning, Design and Research Institute, Wuhan 430040, China)

**Abstract:** Rubble spur dike is a common hydraulic structure used in water regulation whose hydrodynamics characteristics of the spur is an important reference to related engineering assessment. Fluid-solid coupling model is a powerful tool used to simulate corresponding hydrodynamic process and describe the mechanical characteristics. A CFD-DEM numerical model is established, which is a coupling of water flow model in a porous medium with free surface and discrete element method. The validity and simulation accuracy of the model are verified based on experimental data. Using this numerical model, the numerical simulation of the flow around the rubble spur dike is carried out, and the influence of the structural water permeability on the local flow and the force of the rubble body is studied. The results show that: 1) As the water permeability of the spur dike increases, the wake area extends along the flow direction. 2) The velocity distributions of the main flow zone and the wake zone under different water permeability conditions of the dam body are obviously different, but the shear velocity distribution in the wake zone has a certain similarity. 3) The force analysis of the spur dike structure shows that as the water permeability of the dike body increases, the force area of the block spreads from the dike head to the dike body, and the force area gradually increases.

**Keywords:** rubble spur dike; flow characteristics; structural stress; CFD-DEM( computational fluid dynamics and discrete element method) coupling model; free surface flow

丁坝是一种比较常见的水利工程设施, 广泛应用于航道整治、水利调控、水生态环境治理中。

根据坝身是否透水, 丁坝可分为透水丁坝和不透水丁坝。相比于不透水丁坝, 透水丁坝既可将一

**收稿日期:** 2021-01-14

**作者简介:** 李有为(1981—), 男, 硕士, 高级工程师, 从事航道科研与设计。

部分水流挑离河岸，起控制和引导水流的作用；又可让一部分水流低速渗过丁坝流向坝田，达到减速、缓流、落淤的效果。

丁坝绕流及受力特性对其性能发挥有重要影响，已有的研究方法主要以试验为主。喻涛等<sup>[1]</sup>通过水槽试验研究了坝身横断面形式和丁坝前后水位落差对坝体稳定性的影响；刘临雄<sup>[2]</sup>对抛石丁坝进行原形观测，研究了丁坝结构稳定性的影响因素及防冲刷能力的增强；张玉等<sup>[3]</sup>基于概化模型试验研究来流流量、水深、坝长对坝根水毁的影响。

实体模型试验虽然效果较好，但耗时费力、成本投入较大，近年来借助数值模拟开展相关研究正逐渐成为一种可行的发展方向。许慧等<sup>[4]</sup>采用二维水流数值模拟方法开展了淹没丁坝群绕流模拟研究，得到的河道流场和水位场与实测结果吻合较好；胡田<sup>[5]</sup>建立发展了用于分析双丁坝附近的水流特性的数值模型，并模拟分析了不同工况下双丁坝附近的三维水流特性；施如学<sup>[6]</sup>采用 RNG  $k-\varepsilon$  三维紊流模型对丁坝冲刷坑内的水流进行模拟，分析冲刷坑内流速、壁面剪切应力、湍动能的分布；宁健<sup>[7]</sup>结合水流模型和泥沙输运模型开展了丁坝局部冲刷的三维数值模拟，精确模拟了丁坝附近流场信息并预测冲刷形态。

以上模拟研究多集中于不透水丁坝，针对透水式碎石丁坝的研究较少。透水式丁坝绕流模拟需要考虑流固相互间的作用，涉及复杂的多孔介质透水流动。常规方法多采用宏观的欧拉双流体模型，将固相视作连续性流体相处理，具有计算简单、计算量小的优点，但经验性较强、普适性欠佳。本文采用基于欧拉-拉格朗日框架的计算流体动力学(CFD)和离散单元法(DEM)耦合的 CFD-DEM 模型来计算液固两相流动，模拟出水式碎石丁坝绕流特性。通过分析不同孔隙率丁坝的计算结果，研究透水性对坝头区流动分离、坝体下游剪切流动及坝体受力分布的影响。该模型能较好地 在航道整治建筑物结构设计、损毁机理分析、维修方案设计等方面应用。

## 1 数学模型和数值方法

### 1.1 CFD-DEM 流固耦合模型

流体相的运动采用三维自由表面水流模型模拟，垂向坐标进行了  $\sigma$  坐标变换，可高效地拟合不规则床面和自由表面运动，坐标变换关系式为  $\sigma = (z - \zeta) / D$ ，其中  $z$  为垂向坐标， $\zeta$  为自由表面水位值， $h$  为静水深， $D$  为总水深， $D = h + \zeta$ 。该模型发展于大尺度地表水流运动模拟的静压模型，通过补充动压修正项极大地拓宽了模型的适用范围，特别是对于结构物局部流动的模拟<sup>[8]</sup>。控制方程如下：

$$\frac{\partial(\varepsilon \zeta)}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon q_\sigma)}{\partial \sigma} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\varepsilon q_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon q_x u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon q_x v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon q_x \tilde{w})}{\partial \sigma} = -\varepsilon g D \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \\ & \varepsilon \frac{D}{\rho_0} \left( \frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{\partial \sigma \partial p_n}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \nu_t \frac{\partial q_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \nu_t \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) + \\ & \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \varepsilon \frac{\nu_t}{D} \frac{\partial q_x}{\partial \sigma} \right) + D f_{d,x} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\varepsilon q_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon q_y u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon q_y v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon q_y \tilde{w})}{\partial \sigma} = -\varepsilon g D \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \\ & \varepsilon \frac{D}{\rho_0} \left( \frac{\partial p_n}{\partial y} + \frac{\partial \sigma \partial p_n}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \nu_t \frac{\partial q_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \nu_t \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) + \\ & \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \varepsilon \frac{\nu_t}{D} \frac{\partial q_y}{\partial \sigma} \right) + D f_{d,y} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\varepsilon q_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon q_z u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon q_z v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon q_z \tilde{w})}{\partial \sigma} = -\varepsilon \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_n}{\partial \sigma} + \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \nu_t \frac{\partial q_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \nu_t \frac{\partial q_z}{\partial y} \right) + \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \varepsilon \frac{\nu_t}{D} \frac{\partial q_z}{\partial \sigma} \right) + D f_{d,z} \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $q_\sigma$ 、 $q_x$ 、 $q_y$ 、 $q_z$  为流场变量：

$$\begin{aligned} q_\sigma &= D \tilde{\omega} = \frac{q_z}{D} - \frac{q_x}{D} \left( \sigma \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \\ & \frac{q_y}{D} \left( \sigma \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \left( \sigma \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{cases} q_x = Du \\ q_y = Dv \\ q_z = Dw \\ D = h + \zeta \end{cases} \quad (6)$$

式中： $x$ 、 $y$ 、 $z$  为笛卡尔坐标分量； $t$  为时间；

$\rho_0$  为流体密度;  $p_n$  为动压;  $u$ 、 $v$ 、 $w$  为流体速度分量;  $\varepsilon$  为孔隙率;  $\nu_t$  为涡黏系数, 通过 SST  $k-\omega$  两方程湍流模型计算得到;  $f_{d,x}$ 、 $f_{d,y}$ 、 $f_{d,z}$  为单位体积颗粒对流体的反作用力。

颗粒相的运动通过 DEM<sup>[9]</sup> 模拟, 根据牛顿第二定律, 颗粒平移运动微分方程为:

$$\begin{cases} (m+m_v)\frac{du}{dt}=F_{CN,x}+F_{CT,x}+F_{D,x}+F_{P,x} \\ (m+m_v)\frac{dv}{dt}=F_{CN,y}+F_{CT,y}+F_{D,y}+F_{P,y} \\ (m+m_v)\frac{dw}{dt}=F_{CN,z}+F_{CT,z}+F_G+F_{D,z}+F_{P,z} \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $m$  为颗粒质量;  $m_v$  为颗粒加速运动过程中流体惯性给颗粒带来的附加虚拟质量;  $F_{CN}$  和  $F_{CT}$  分别为颗粒间径向和切向接触作用力, 采用线性弹簧阻尼器 (LSD) 模型计算;  $F_G$  为颗粒所受重力;  $F_D$  和  $F_P$  分别为环境流体作用在颗粒上的阻力和压力梯度, 其中阻力通过阻力模型计算, 并将以单位体积力的形式反作用于流体, 实现流体颗粒的耦合作用。

基于刚体定轴转动定律, 颗粒旋转运动微分方程为:

$$\begin{cases} I\frac{d\omega_x}{dt}=T_{t,x}+T_{r,x} \\ I\frac{d\omega_y}{dt}=T_{t,y}+T_{r,y} \\ I\frac{d\omega_z}{dt}=T_{t,z}+T_{r,z} \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $I$  为转动惯量;  $\omega$  为旋转角速度;  $T_t$  和  $T_r$  分别为颗粒所受切向力矩和滚阻力矩。

1.2 数值方法

本文数值模拟基于自主开发的三维带自由表面水流运动的计算程序 HydroFlow。控制方程的数值离散基于有限体积法, 采用非结构计算网格。计算模型设置了多种湍流计算模式, 包括一方程 S-A 湍流模型、两方程 SST  $k-\omega$  湍流模型、分离涡模型 (DES) 和大涡模拟 (LES) 等。本文对流项采用二阶 TVD-Osher 格式、扩散项采用中心离散格式、湍流模型采用 Menter 等<sup>[10]</sup> 提出的 SST  $k-\omega$  模型。

2 数值模型验证

首先进行单颗粒沉降计算, 以验证 CFD-DEM 耦合模型的模拟精度。图 1 所示为一小球在水中沉降, 小球从水面附近静止释放, 在重力作用下做加速运动, 随着速度的增加小球受到的流动阻力逐渐增大, 当阻力与重力平衡时小球达到下落终速度, 之后保持匀速运动。

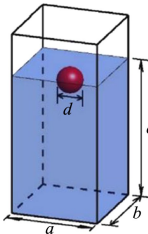


图 1 小球静水中沉降

计算采用的小球为 Mordant 试验中所用的玻璃小球<sup>[11]</sup>, 其密度为  $2\,560\text{ kg/m}^3$ , 直径  $d=2\text{ mm}$ , 下落终速度对应的雷诺数 ( $Re=U_\infty d/\nu$ ) 为 600。计算域设定为  $20d\times 20d\times 150d$ , 采用尺度为  $d$  的正六面体计算网格对计算域进行空间离散。计算域四周边界采用滑移边界条件, 底部为无滑移壁面。流场和颗粒运动计算时间步长均为  $10^{-4}\text{ s}$ 。Mordant 的试验测量了小球在沉降过程中沉降速度随时间的变化, 可用于模拟结果的验证。

图 2 给出了实测和计算得到的小球沉降速度随时间的变化。可以看到, 在沉降初始阶段, 颗粒向下做加速运动, 但由于速度的增加导致运动阻力增大、加速度逐渐减小。当小球运动阻力与重力保持平衡后, 沉降速度保持恒定。数值模拟结果与实测值非常吻合, 验证了本文两相耦合计算模型的模拟精度。

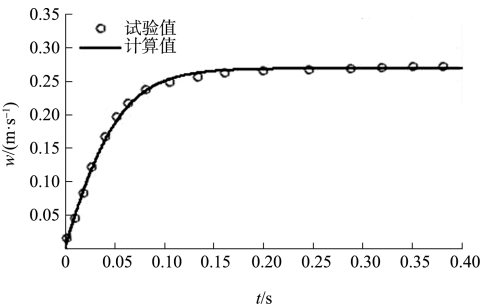
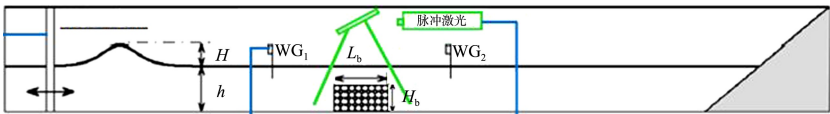


图 2 小球沉降速度随时间的变化

为进一步验证数值模型的准确性，开展孤立波与透水防波堤相互作用的模拟。Wu 等<sup>[12]</sup>进行了相关试验研究，图 3 为孤立波与淹没透水防波堤作用水槽侧视图，试验中孤立波从水槽（长 20 m，宽 0.5 m，高 0.6 m）左侧生成并向右侧传播，水槽

内静水深  $h=0.106\text{ m}$ ，孤立波波高水深比为  $H/h=0.45$ 。防波堤由粒径 15 mm 的玻璃球组成并固定在床面上，其流向的长度  $L_b=0.130\text{ m}$ 、高度  $H_b=0.065\text{ m}$ 、宽度横跨整个水槽。



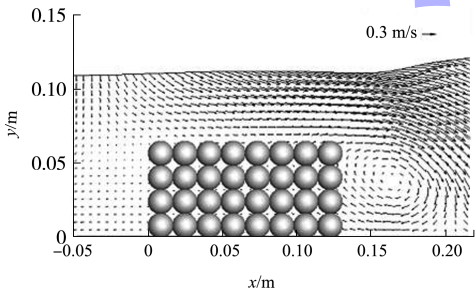
注：H 为波高，WG<sub>1</sub>、WG<sub>2</sub> 为波高监测点。

图 3 孤立波与淹没透水防波堤作用水槽侧视图

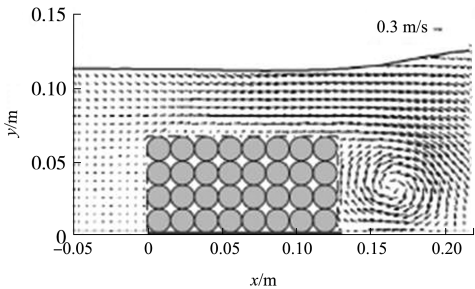
数值模拟采用的计算域在流向和垂向与试验一致；在横向上，考虑到流动的二维特征，为降低计算量，横向宽度取 0.16 m，并将两侧壁面设为滑移边界条件。图 4 给出了数值模拟和试验得到的  $t=1.85\text{ s}$  时刻（孤立波已过防波堤）防波堤周围速度矢量，可以看到，数值计算准确模拟了防波堤尾流涡位置 and 范围，验证了数值模型的计算精度。

丁坝绕流的数值模拟研究，侧重于分析不同块体孔隙条件下丁坝局部的水动力学特征，涉及坝头局部流场结构和组成块体的受力特征。

图 5 为丁坝外形结构，坝高 0.06 m，坡度 1:2，坝身长 0.1 m，坝头为顶部直径 0.01 m、底部直径 0.25 m 的半圆台。本文未考虑块体的不规则形状，采用球形颗粒进行数值模拟。丁坝由粒径为 5 mm 的球形碎石颗粒按给定外形堆砌而成，碎石丁坝在整个计算中保持静止状态，通过改变颗粒数来调整碎石坝体的孔隙率，设置了 3 种不同的孔隙率：0.40、0.55、0.70。



a) 计算值



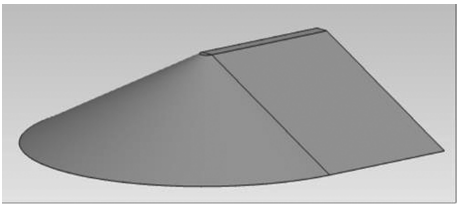
b) 试验值

图 4  $t=1.85\text{ s}$  时防波堤周围速度矢量

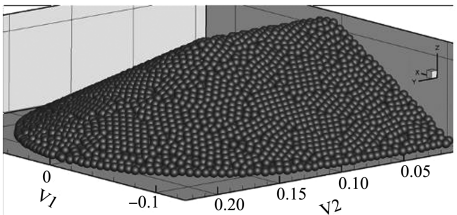
3 碎石型丁坝绕流数值模拟及分析

3.1 计算条件

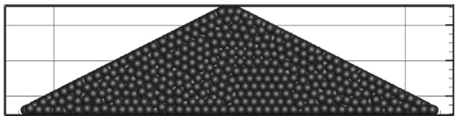
基于验证后的数值模型，本文开展了碎石型



a) 几何外形

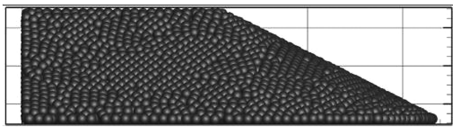


b) 颗粒堆积形成的坝体



c) 流向截面

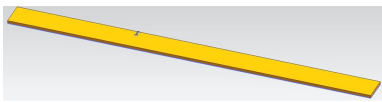




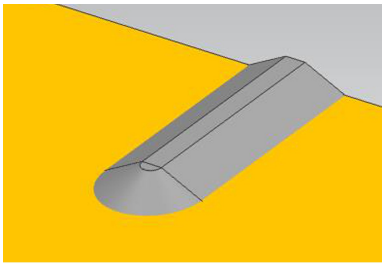
d) 横向截面

图 5 碎石丁坝几何外形及生成

碎石丁坝放置于计算域一侧(图 6)，模拟采用的计算域长 10 m、宽 0.8 m，水深 0.05 m，坝体中心面距计算域入口 2.0 m、距计算域出口 8.0 m。计算域采用六面体网格进行离散，见图 7。采用分块网格生成方法，在丁坝所在区域及尾迹区进行网格加密以捕捉坝体周围和尾流区域复杂的流场结构，在其余区域适当采用尺度较大的网格以降低计算量。

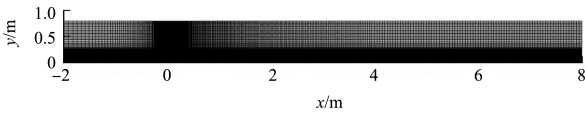


a) 全局

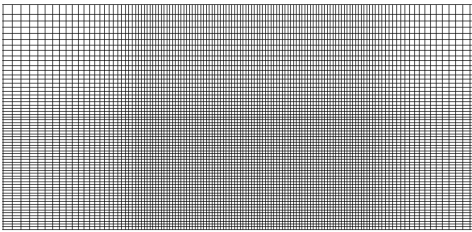


b) 丁坝周围局部

图 6 计算域



a) 全局网格



b) 丁坝所在区域网格加密(水平计算网络)

图 7 计算网格

入口给定流量和湍流边界条件，通过试算得

到充分发展的流量、湍动能和湍流耗散率沿水深方向的分布，并作为边界条件施加到入口。入口平均流速为 0.1 m/s，对应的以水深为特征尺度的弗劳德数  $F_r = 0.143$ 。出口给定固定水位边界条件，床底和丁坝侧壁设为无滑移边界条件，采用壁面函数进行数值模拟。为检验水流模拟的准确性，设置不受扰动的上游区域中的某网格点，提取该处水平流速的垂向分布数据，与近壁流动理论分析的对数分布律进行比较，比较结果见图 8。数值模拟的速度分布满足经典的对数率分布，验证了模型对于近壁流动模拟的精度。

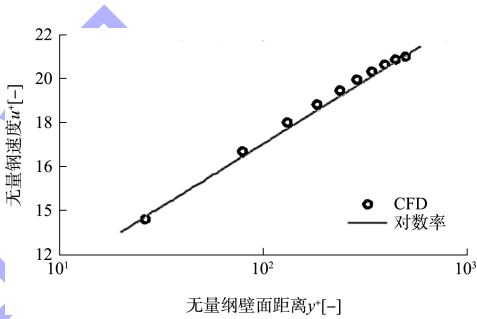


图 8 验证近壁流动的数值模拟

3.2 碎石丁坝绕流的流场特征

丁坝局部绕流特征的分析有助于工程结构的设计及优化，其中流速的空间分布直接影响丁坝局部的物质运输过程。图 9 给出了半水深平面内不同坝体孔隙率条件下的局部流场结构，共 3 种计算条件。对于坝体孔隙率 0.4 的计算条件，流线图清晰地显示出水流在丁坝上游基本保持平行流动。来流流经丁坝结构，由于坝体的阻流作用，流线出现弯曲，大部分水流绕过坝体流向下游，小部分水流在坝体上游形成一回漩涡流场结构。由于过流面积减小，水流绕过坝体后流速增大，与丁坝下游水流存在较大速度差，形成一长条形尾流场结构。在主流的作用下，尾流宽度向下游不断缩减并最终消失，即主流在侧壁处附着，形成一个封闭的尾流场。这一流动特征常见于钝体绕流，只是封闭尾流场的空间尺度受具体的结构尺度及来流动力条件影响而不同。

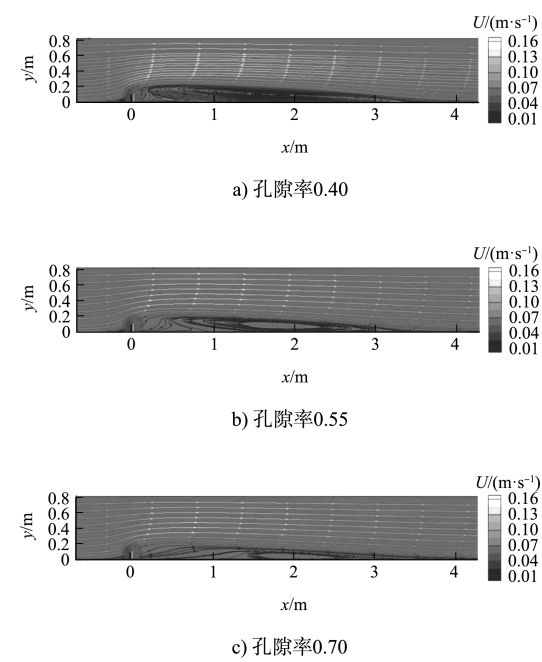


图 9 不同孔隙率条件下丁坝绕流的流线分布

对比分析不同坝体孔隙率条件下丁坝绕流的流场结构，结果显示随着孔隙率的增大，丁坝上游漩涡尺度有所减小。这是由于坝体透水性增强，水流穿过坝体直接流向丁坝下游，使得上游剪切流动减弱。同时，穿过坝体的水流会冲击尾流区，导致尾流漩涡结构的中心向下游移动。但从图 9 可以看到，尾流场漩涡结构的流向尺度并未延长，反而随着透水性的增强主流在壁面上的再附着点略有前移。

为定量分析不同孔隙率下水流绕过丁坝后的流动特性，图 10 给出了不同孔隙率下丁坝下游距丁坝中心线 0.2 m 处流向、流速沿横向的分布，从图中可以看到，横向断面主要分为高速主流区、低速尾流区以及介于两者之间的强剪切流动区。在尾流区，由于丁坝的阻流作用，流速较小。随着孔隙的增加，丁坝透水性增强，流速有所增大。主流区流速较尾流区大，其值随着孔隙率的增加而减小，其为过流面阻塞效应减弱所引起。位于尾流区和主流区之间的剪切流动，其范围较窄，存在较大的速度梯度。和主流区和尾流区不同，剪切流速度分布受丁坝孔隙率影响较小。

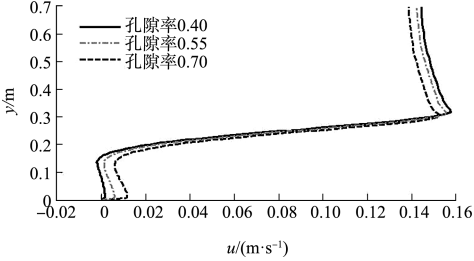
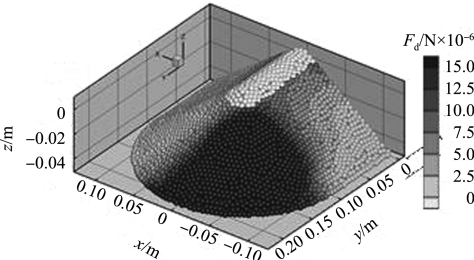


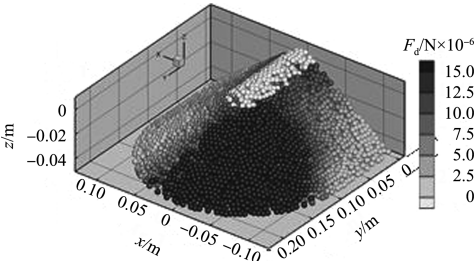
图 10 不同孔隙率条件下流向、速度的横向分布

3.3 坝体块石受力分析

坝体受力分布是判断坝体结构稳定性的重要依据，其中水流对坝体的作用尤为重要。图 11 给出了不同孔隙率条件下坝体单颗粒所受流体作用力的空间分布，坝顶由于出水所以不受水流作用力。模拟结果显示，作用力最大的位置出现在坝头迎流面，此处受到水流的直接冲击作用，因此是最容易受到冲击而发生破坏的区域，在结构设计时应予以重点考虑；在坝身背流面，尾迹流动速度较小，受到的水流作用力也较弱；在坝身迎流面，靠近坝顶和坝头区域由于受到一定的来流冲击，水流作用力较大，而靠近床底和侧壁的区域水流作用力相对较小。从流场结构来看，此区域流场出现了小范围的环流结构，减小了水流直接冲击的强度。



a) 孔隙率0.40



b) 孔隙率0.55

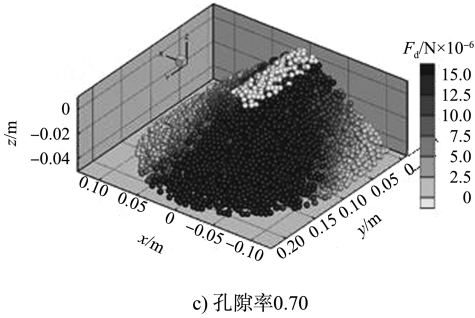


图 11 丁坝组成块体的单颗粒水动力载荷分布

对比分析不同孔隙率条件下坝体所受作用力分布，结果显示在孔隙率较小时，高受力区主要集中在坝头区域；随着坝体孔隙率的增加，高受力区向坝身蔓延，范围逐渐变大。

4 结论

1)在主流的作用下，丁坝尾流区出现长条形尾流涡漩结构，随着坝体孔隙率的增加，丁坝透水性增强，导致尾流涡漩结构的中心点后移，但涡漩结构的流向尺度略有减小。

2)丁坝下游横流断面存在低速尾流区、高速主流区以及小范围大梯度剪切层，不同孔隙率条件下尾流区和主流区流速存在较大差异，而剪切层速度分布却基本一致。

3)丁坝高受力区主要集中于坝头区域，随着孔隙率的增加，水流渗透速度增大，高受力区扩大至坝体内部。

**致谢：**上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院张景新课题组提供的 HydroFlow 计算软件。

(上接第 86 页)

[8] 张毅,刘勇,张帅帅.向家坝日调节运行对长江叙渝段航道维护影响研究[J].水运工程,2017(1): 108-114.

[9] 李秋圆.向家坝电站运行对长江泸州河段通航条件的影响研究[D].重庆:重庆交通大学,2016.

[10] 黄岱.长江上游宜宾-重庆河段日调节非恒定流传播特性研究[D].重庆:重庆交通大学,2019.

[11] 古宇翔,杨胜发,黄岱,等.非恒定流条件下叙泸段航道水深资源利用研究[J].水运工程,2020(10): 99-105.

[12] 郭凤清,屈寒飞,曾辉,等.基于 MIKE21 FM 模型的蓄

参考文献:

[1] 喻涛,王平义,陈里,等.不同结构型式丁坝稳定性试验研究[J].人民长江,2013,44(24): 54-57.

[2] 刘临雄.砂质浅滩抛石丁坝结构稳定性分析及防护措施[J].水运工程,2019(2): 89-92.

[3] 张玉,张秀芳,王平义.长江上游丁坝坝根水毁过程的试验研究[J].水运工程,2017(6): 150-155.

[4] 许慧,李国斌,尚倩倩,等.淹没丁坝群二维水流数值模拟新方法[J].水科学进展,2014,25(3): 407-413.

[5] 胡田.双丁坝水流特性的水槽试验和数值模拟研究[D].上海:上海海洋大学,2015.

[6] 施如学.丁坝冲刷坑的三维水流流态数值模拟[D].重庆:重庆交通大学,2014.

[7] 宁健.丁坝绕流流场及局部冲刷数值模拟研究[D].西安:西安理工大学,2019.

[8] ZHANG J X, SUKHODOLOV A N, LIU H. Non-hydrostatic versus hydrostatic modelings of free surface flows [J]. Journal of hydrodynamics , 2014, 26(4): 512-522.

[9] CUNDALL P A, STRACK O D. A discrete numerical model for granular assemblies[J]. Geotechnique, 1979, 29(1): 47-65.

[10] MENTER F R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications [J]. AIAA Journal, 1994, 32(8): 1598-1605.

[11] MORDANT N, PINTON J F. Velocity measurement of a settling sphere [J]. The European physical journal B (Condensed matter and complex systems), 2000, 18(2): 343-352.

[12] WU Y T, HSIAO S C. Propagation of solitary waves over a submerged permeable breakwater[J].Coastal engineering, 2013, 81: 1-18. (本文编辑 武亚庆)

洪区洪水演进数值模拟[J].水电能源科学,2013,31(5): 34-37.

[13] 交通运输部天津水运工程科学研究院.内河航道与港口水流泥沙模拟技术规程: JTS/T 231-4—2018[S].北京:人民交通出版社股份有限公司,2018.

[14] 许光祥,段周平,胡小庆.急滩消滩指标的分析与运用[J].水运工程,2015(7): 108-113.

(本文编辑 武亚庆)