



欧标任意形状钢筋混凝土断面的 正截面极限承载能力计算

郭士勇¹, 孙凤明²

(1. 中交第四航务工程勘察设计院有限公司, 广东 广州 510230; 2. 中国港湾工程有限责任公司, 北京 100027)

摘要: 为了提高钢筋混凝土双向受弯构件配筋的精细化程度, 基于欧洲混凝土标准的设计方法对任意形状钢筋混凝土断面正截面极限承载能力进行分析, 针对钢筋混凝土材料应力-应变关系中的分段特性, 采用高效的动态网格更新技术和高斯积分方法对钢筋混凝土构件正截面内力进行求解并编写相关程序, 该程序能输出构件配筋正截面极限承载能力的三维包络面数据, 可结合构件有限元全节点内力结果分析配筋的可行性。结果表明, 该方法计算速度快、精度高, 同时解决了设计时仅对单一节点、单一工况验算的便利性和完备性问题。

关键词: 欧标; 动态网格; 高斯积分; 极限承载能力

中图分类号: U 652.7

文献标志码: A

文章编号: 1002-4972(2021)04-0008-07

Calculation of ultimate limit state normal section capacity of reinforced concrete arbitrary section based on Eurocode 2

GUO Shi-yong¹, SUN Feng-ming²

(1. CCCC-FHDI Engineering Co., Ltd., Guangzhou 510230, China; 2. China Harbor Engineering Co., Ltd., Beijing 100027, China)

Abstract: To improve the accuracy of biaxial bending member reinforcement design, we analyze the ultimate limit states capacity of the reinforced concrete arbitrary sections based on Eurocode 2, calculate the reinforced concrete normal section capacity with an efficient dynamic mesh update technique and a Gaussian integration method according to the segmented characteristics of stress-strain relationship of reinforced concrete materials, and write the related program. The compiled computer program can analyze the ultimate limit states capacity of reinforced concrete arbitrary sections, give three-dimensional envelope surface data, and analyze the feasibility of reinforcement in conjunction with the internal force results of the finite element full node. The results show that this method has fast calculation, high accuracy, and solves the problem of convenience and completeness with a single node result check.

Keywords: Eurocode 2; dynamic mesh; Gaussian integration; ultimate limit states capacity

轴力和双向弯矩作用下的钢筋混凝土构件常见于建筑、桥梁、码头等土木工程结构中, 例如多层桁架式码头的桁架构件、桩基等。对于这些构件的配筋验算, 设计人员往往仅选取结构有限元分析中的几个单元内力进行校验, 这可能导致配筋结果过于保守或漏掉最不利节点的内力。对

于海外工程, 咨询工程师对设计审查较为严苛, 经常需要设计提供一个完备的计算结果, 在大规模结构中, 逐个节点验算几乎是不可能实现的。同时, 常规的断面形状, 如圆形、矩形可直接利用公式进行配筋分析, 而不规则的断面形状则相对复杂, 需要借助计算机程序进行辅助分析。

收稿日期: 2020-07-14

作者简介: 郭士勇(1985—), 男, 硕士, 高级工程师, 从事港口及航道工程设计。

我国规范^[1-2]已对任意形状的钢筋混凝土断面正截面承载力给出了相应的分析方法, 国内一些学者^[3]及机构^[4]针对我国规范开发了相关计算程序。但考虑到我国规范中混凝土应力-应变模型与欧标^[5]模型在混凝土的强度、屈服压应变、极限压应变、钢筋的极限屈服强度等方面有所不同, 导致这些程序无法直接应用。同时, 我国规范计算混凝土截面内力时, 通过采用细分混凝土单元方式来达到高精度计算结果, 但这也导致计算效率较低。

本文通过图形分解方法实时动态地对积分截面单元域进行子域分解, 再利用高斯积分方法针对分解后的积分子域进行计算, 可大幅提高计算效率及计算精度。编写的相关程序仅简单划分网格即可分析任意形状钢筋混凝土断面的正截面极限承载力, 并提供相应截面三维包络面数据供设计使用。

1 基本假定

本文在轴力和双向弯矩作用下任意形状钢筋混凝土断面正截面极限承载力分析中采用 Eurocode 2 中的基本假定:

- 1) 平截面假定, 截面应变保持平面;
- 2) 不考虑混凝土承受拉应力;
- 3) 混凝土受压时应力-应变关系按平直段加抛物线段, 见式(1)~(5):

$$\sigma_c = \begin{cases} f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] & (0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}) \\ f_{cd} & (\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2}) \end{cases} \quad (1)$$

$$f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_c \quad (2)$$

$$\varepsilon_{c2} = \begin{cases} 2.0 \times 10^{-3} & (f_{ck} \leq 50) \\ [2.0 + 0.085(f_{ck} - 50)] \times 10^{-3} & (f_{ck} > 50) \end{cases} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{cu2} = \begin{cases} 3.5 \times 10^{-3} & (f_{ck} \leq 50) \\ [2.6 + 0.085(90 - f_{ck})] \times 10^{-3} & (f_{ck} > 50) \end{cases} \quad (4)$$

$$n = \begin{cases} 2.0 & (f_{ck} \leq 50) \\ 1.4 + 23.4 [(90 - f_{ck}) / 100]^4 & (f_{ck} > 50) \end{cases} \quad (5)$$

式中: α_{cc} 为考虑长期不利影响的混凝土抗压强度系数, 按欧标取 1.0; f_{ck} 为混凝土轴心抗压强度标准值(MPa); f_{cd} 为混凝土抗压强度设计值(MPa); γ_c 为混凝土材料分项系数; ε_{c2} 为混凝土压应力达到 f_{cd} 时的混凝土压应变; ε_{cu2} 为混凝土极限压应变; σ_c 为混凝土的压应力(MPa)。

4) 钢筋应力-应变曲线采用斜直线加平直线的理想弹塑性性模型, 见式(6)~(8):

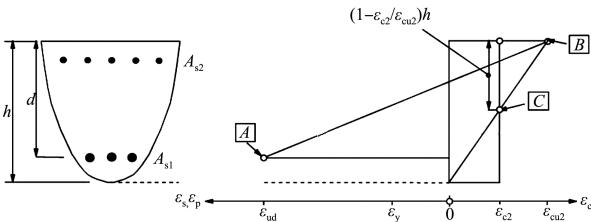
$$\sigma_s = \begin{cases} \varepsilon_s E_s & (0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd}) \\ f_{yd} & (\varepsilon_{yd} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{ud}) \end{cases} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{yd} = f_{yd} / E_s \quad (7)$$

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s \quad (8)$$

式中: f_{yk} 为钢筋抗拉强度标准值(MPa); f_{yd} 为钢筋抗拉强度设计值(MPa); γ_s 为钢筋材料分项系数; ε_{yd} 为钢筋屈服拉应变; ε_{ud} 为钢筋极限拉应变; σ_s 为钢筋拉应力(MPa); E_s 为钢筋弹性模量(MPa)。

5) 欧标规定轴力和弯矩作用下的钢筋混凝土截面应变应符合图 1 的关系。



注: A 点为截面受拉钢筋到达极限拉应变 ε_{ud} 的状态, 对于欧标 500A 钢筋, 其极限拉应变取 0.022 5; B 点为截面受压边缘混凝土到达极限压应变 ε_{cu2} 的状态; C 点为截面到达全截面受压时, 混凝土压应变限值 ε_{c2} 的状态; h 为钢筋混凝土截面高度; d 为有效高度; A_{s2} 为受压钢筋面积; A_{s1} 为受拉钢筋面积。

图 1 承载力极限状态下钢筋混凝土截面应变分布

与我国混凝土结构设计规范不同的是, 欧标 Eurocode 2 中给出了全截面受压时混凝土压应变限值分布, 其先根据截面高度计算转角点 C, 压应变分布为绕 C 点转动的直线, 全截面受压不得超过 ε_{c2} 。

6) 考虑钢筋尺寸对截面尺寸的影响, 正截面承载力作用点基于与混凝土截面形心, 不考虑钢筋受力对合力作用点的影响。

2 应力积分

以截面的形心建立坐标系，任意形状上给定中性轴方向 θ 的坐标 x' 、 y' 与原有坐标系 x 、 y 存在如下坐标变换，具体见图 2 及式(9)~(11)：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{9}$$

轴力 P 在原有坐标系的双向偏心距 e_x 、 e_y 与在变换坐标系偏心距 e'_x 、 e'_y 的转换关系为：

$$\begin{pmatrix} e'_x \\ e'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e'_x \\ e'_y \end{pmatrix} \tag{11}$$

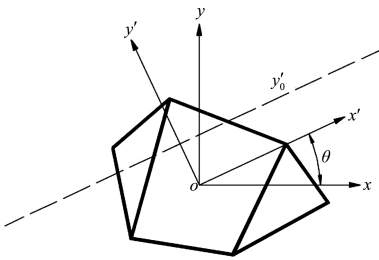


图 2 截面坐标系转换

钢筋混凝土截面上任意点应变的表达式为：

$$\varepsilon(y') = \phi(y' - y'_0) \tag{12}$$

式中： y'_0 为给定中性轴方向 θ 的 0 应变处的 y' 坐标(m)； $\varepsilon(y')$ 为给定中性轴方向 θ 的坐标 y' 处应变(MPa)； ϕ 为截面曲率。

截面上的应力可由以下积分公式，截面弯矩可根据式(13)~(15)确定：

$$P = \int_A \sigma_c dA + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} \tag{13}$$

$$M'_x = P e'_x = \int_A \sigma_c x dA + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} x_i \tag{14}$$

$$M'_y = P e'_y = \int_A \sigma_c y dA + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} y_i \tag{15}$$

式中： σ_c 为混凝土的截面应力(MPa)； σ_{si} 为第 i 根钢筋的截面应力(MPa)； A_{si} 为第 i 根钢筋的截面面积(mm²)； A 为用于积分的混凝土截面面积(mm²)； x_i 、 y_i 为第 i 根钢筋的坐标(m)。

由混凝土的应力-应变函数可知，其为分段函

数：1)拉应力区的混凝土不参与积分，直接取 0；2)应变处于 $0 \sim \varepsilon_{c2}$ 的混凝土区域应采用高斯积分；3)应变处于 $\varepsilon_{c2} \sim \varepsilon_{cu2}$ 的混凝土区域可直接计算面积及面积的形心。

因此，若采用截面直接细分网格并高斯积分的方法，由于方向 θ 的中性轴是动态变化的，这可能会导致局部的初始网格单元处于分段函数的两个区域，从而导致计算结果精度较差。

3 网格处理

为避免方向 θ 的中性轴动态变化导致的积分精度降低问题，国外已有众多研究，如 Sfakianakis^[6] 利用图形方法分析截面应力并计算偏心受力构件的截面承载力；Vivo 等^[7]、Kwan 等^[8] 则利用格林公式将截面的面积分转换为截面边界的曲线积分；Charalampakis 等^[9]、Thanoon 等^[10] 则采用垂直中性轴方向的条带求解截面内力等。然而这些方法仍存在问题，传统的细分截面的方法计算效率低；采用条带法需要在每个迭代步中判断截面边界并划分条带，边界判断难度大；将截面的面积分转换为截面边界曲线积分的方法也同样存在判断边界困难问题。

本文通过图形分解方法实时动态地对积分的截面单元域进行子域分解，再利用高斯积分方法针对分解后的积分子域进行计算，该方法不仅精度高而且相对简单，易于初始网格输入和程序实现，具体步骤为(图 3)：

- 1)输入积分网格，输入网格可为四边形单元或三角形单元；
- 2)先计算每步的中性轴 $y' = y'_0$ 并利用其切割四边形单元及三角形单元生成新的纯三角形单元组；
- 3)再计算每步的屈服边界位置 $y' = y'_{c2}$ 并利用其切割新的三角形单元组生成最终的纯三角形单元组。
- 4)利用生成三角形单元组进行高斯积分求解该步下的轴力及其偏心距。

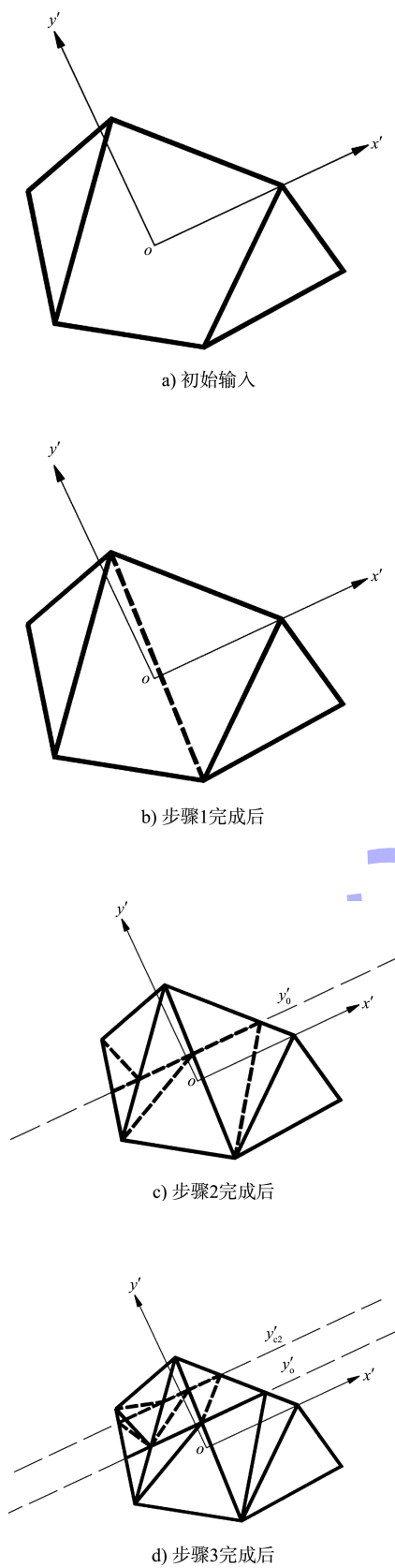


图 3 计算断面网格处理过程

对于三角形单元内的高斯积分, 先采用等参变换, 再利用 25 点高斯积分进行计算, 见式 (16) ~ (19):

$$P \text{ 或 } Pe' = \sum_1^{5 \times 5} c_k f(g_1(s_k, t_k), g_2(s_k, t_k)) |J| \quad (16)$$

$$g_1(s, t) = x_1 + (x_2 - x_1)s + (x_3 - x_1)t \quad (17)$$

$$g_2(s, t) = y_1 + (y_2 - y_1)s + (y_3 - y_1)t \quad (18)$$

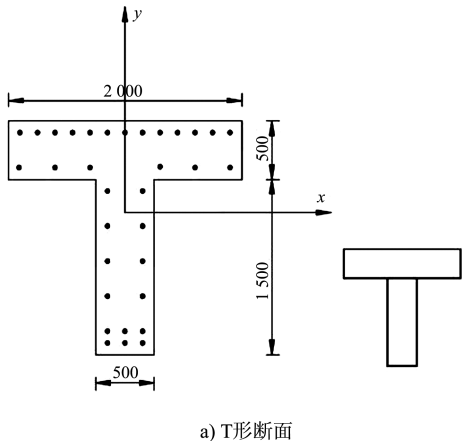
$$|J| = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \quad (19)$$

式中: $f(x, y)$ 为所需积分的原函数; $|J|$ 为雅克比行列式; $g_1(s, t)$ 、 $g_2(s, t)$ 为等参变换的坐标转换函数; (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 为待积分的三角形单元 3 个顶点的坐标; (s_k, t_k) 为高斯积分的积分点坐标; c_k 为高斯积分的权重系数。

基于以上网格的处理方法, 设计人员仅根据钢筋混凝土断面形式输入简单的初步计算网格即可分析该断面形式的正截面极限承载能力, 不需要为了维持高精度而加密输入网格, 且可方便分析任意断面形状, 包括计算断面存在中空的情况。

4 算例结果

本文基于以上的计算方法编制任意形状钢筋混凝土断面正截面极限承载能力的分析程序, 并利用所编制的程序分析了 T 形、工形、L 形及六角空心断面 4 个算例, 算例中混凝土等级均为 C35/45, 钢筋等级为 500B, 具体断面尺寸、配筋及初始网格见图 4。



a) T形断面

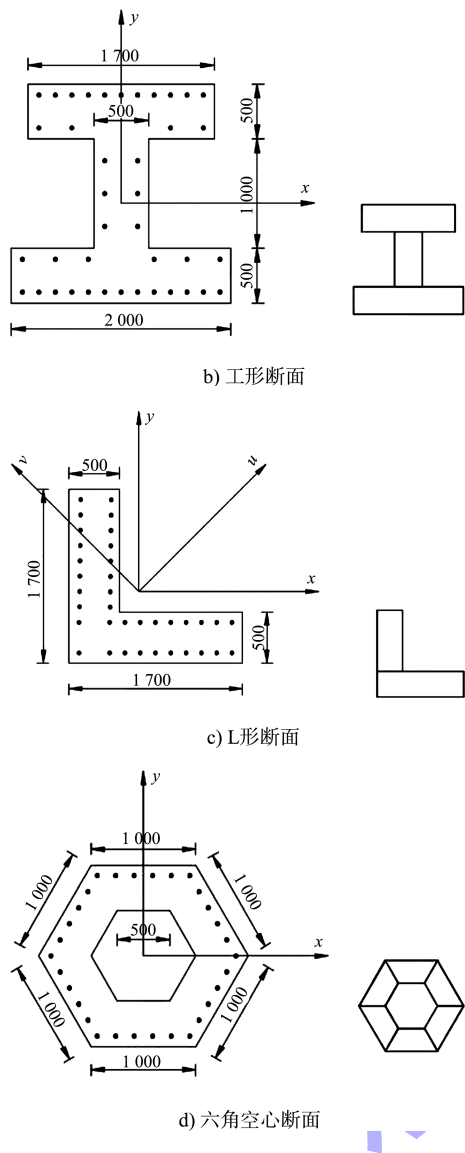


图 4 算例断面的尺寸、配筋及初始网格 (单位: mm)

程序采用 Intel(R) Core(TM) i7-6700 CPU (3.40 GHz) 及 16.0 GB 内存运行, T 形、工形、L 形、六角空心断面 4 个算例运算时间为 0.326、0.542、0.353、0.953 s, 计算效率较高。计算结果见图 5~8。

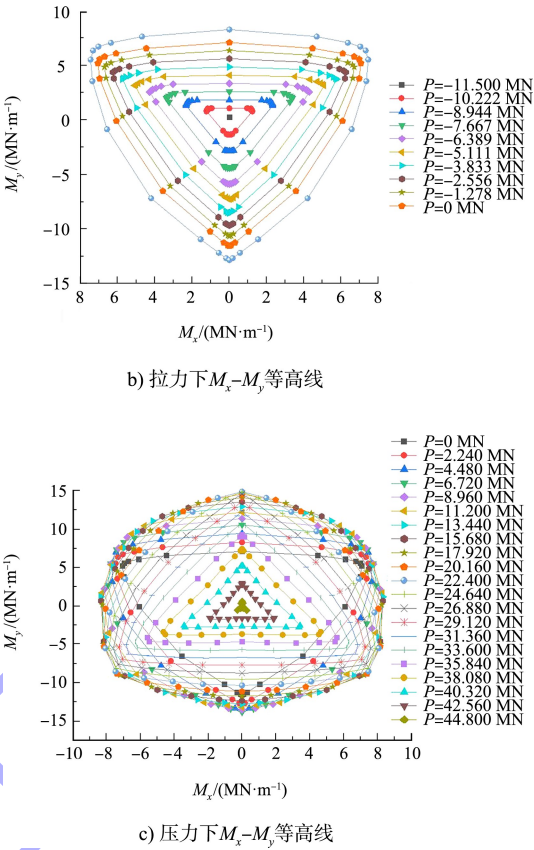
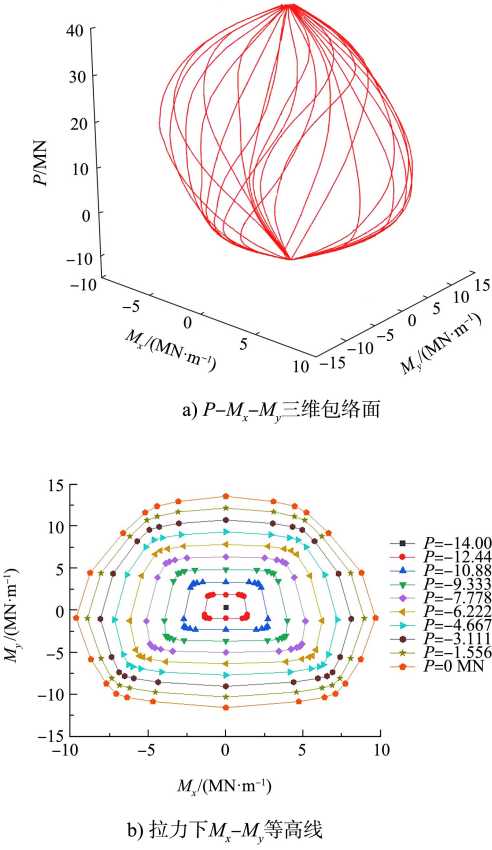
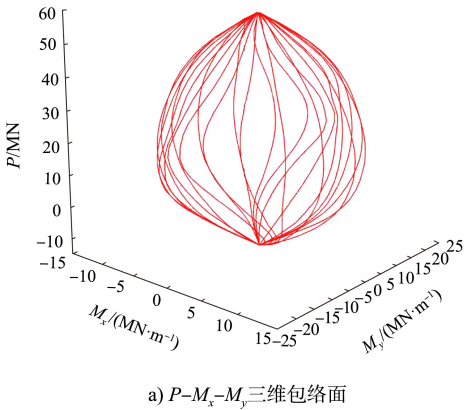


图 5 T 形断面极限承载力计算结果



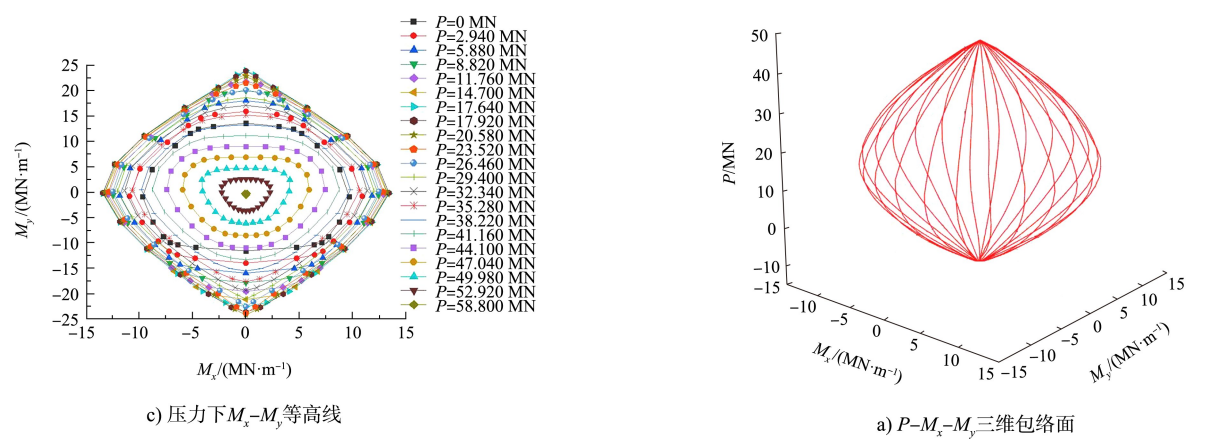


图 6 工形断面极限承载力计算结果

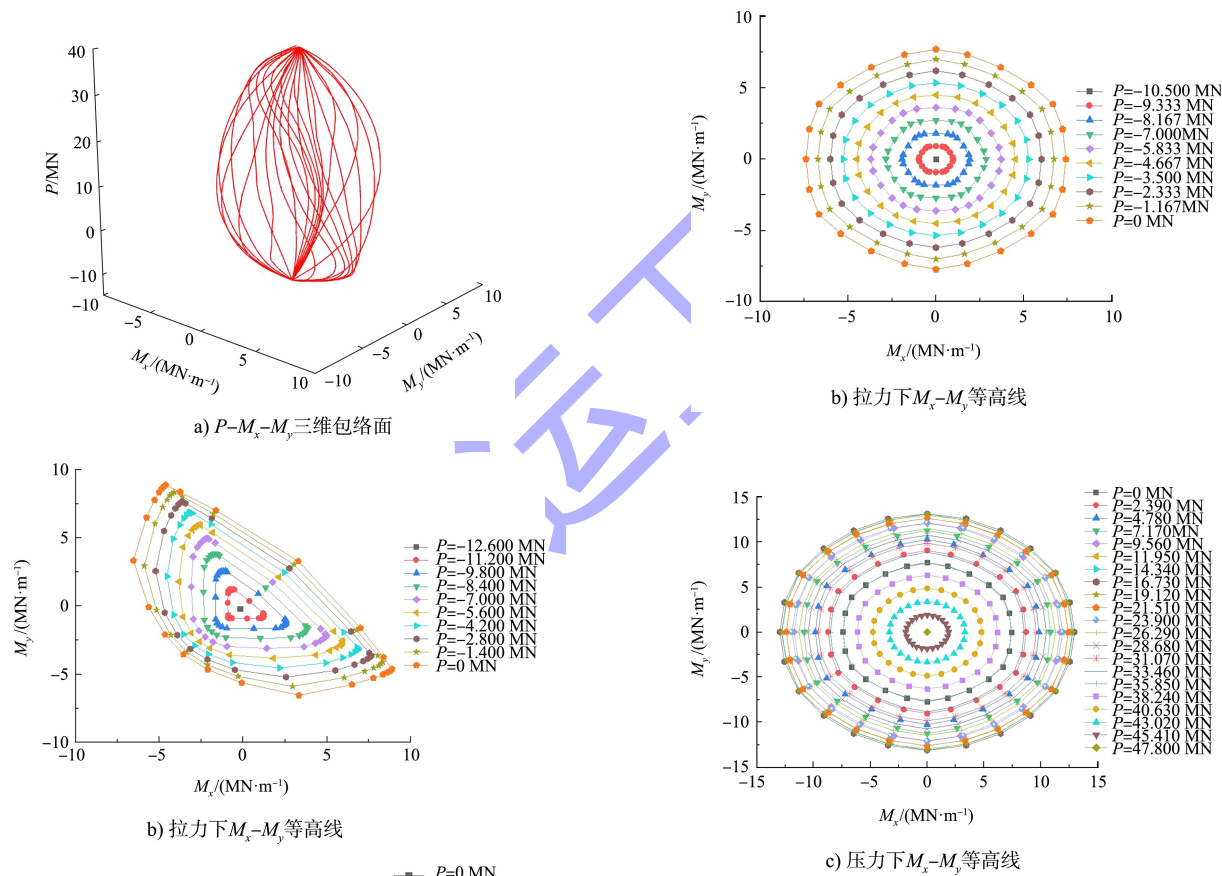


图 8 六角空心断面极限承载力计算结果

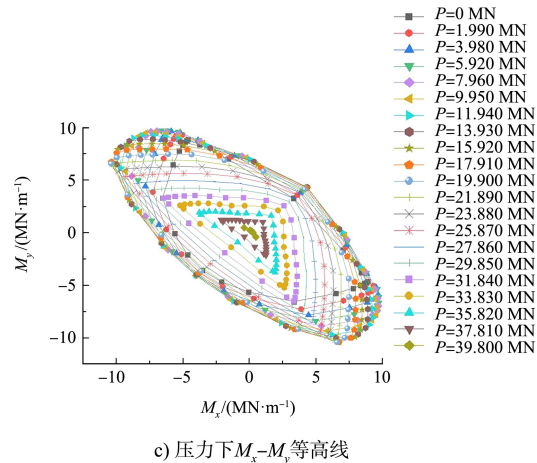


图 7 L 形断面极限承载力计算结果

由图 5、6 可看出, 对于单轴对称的 T 形及工形断面, 其正截面极限承载力为单轴对称的包络面, 截面的 y 轴弯矩承载力较 x 轴大, 并在 y 轴上有一定不对称性, 这是由于截面钢筋形心与截面形心不重合所导致。由图 7 可看出, 对于非轴对称的 L 形断面, 其正截面极限承载力为非轴对称的包络面, 截面弯矩承载能力的分布呈现与 x 、 y 轴带有一定角度分布, 该角度与 L 断面的

u 、 v 主轴相近。由图 8 可看出,对于双轴对称的六角空心断面,其正截面极限承载能力为双轴对称的包络面,截面的弯矩承载能力呈现完全对称分布。

钢筋混凝土断面正截面极限承载能力三维包络面确定后即可对该构件全部节点在所有承载力极限状态工况下内力结果 $F_d(M_{xd},M_{yd},P_d)$ 进行验算,全部内力点应在曲面 $\Omega_R(M_{xR},M_{yR},P_R)$ 范围内,即:

$$\Omega_R(M_{xR},M_{yR},P_R) \ni F_d(M_{xd},M_{yd},P_d) \quad (20)$$

式中: (M_{xR},M_{yR},P_R) 为三维包络面数据点; (M_{xd},M_{yd},P_d) 为配筋计算要求的内力点。

三维校验需要绘制三维散点图及曲面图来进行,过程相对复杂。为简化过程,程序将三维包络面数据点以等高线图形式输出,通过对等高线进行线性差值方法来配筋计算要求的内力点是否在包络面内,即:

$$\text{Ratio} = \max(M_{xd}/M_{xR-M_{yd}-P_d}, M_{yd}/M_{yR-M_{xd}-P_d}) < 1 \quad (21)$$

式中: Ratio 为截面能力比率; $M_{xR-M_{yd}-P_d}$ 为线性差值后的截面 M_x 承载能力,差值点为 (M_{yd},P_d) ; $M_{yR-M_{xd}-P_d}$ 为线性差值后的截面 M_y 承载能力,差值点为 (M_{xd},P_d) 。

5 结果应用

某海外多层桁架式码头结构,潮差 7.9 m,采用 AN600(F1.5)型护舷,标准反力为 392 kN,船与护舷摩擦系数为 0.7;系船柱为 750 kN;均布荷载为 20 kPa;有效波高 $H_s=2.0$ m;设计水流速度 2.5 m/s。靠船柱采用 T 形断面,混凝土设计等级为 C35/C45,保护层厚度 75 mm,截面、钢筋布置及结构断面见图 9。

设计过程中,咨询工程师认为按原有仅对最不利工况下内力并将截面简化成矩形柱的配筋校核方法不具有完整性和精确性,要求采用实际断面并需分析全部有限元节点结果。根据要求,采用本文方法进行分析,结果见图 10,可以看出,两个方向的配筋最大利用率小于 0.6,计算结果满足要求。

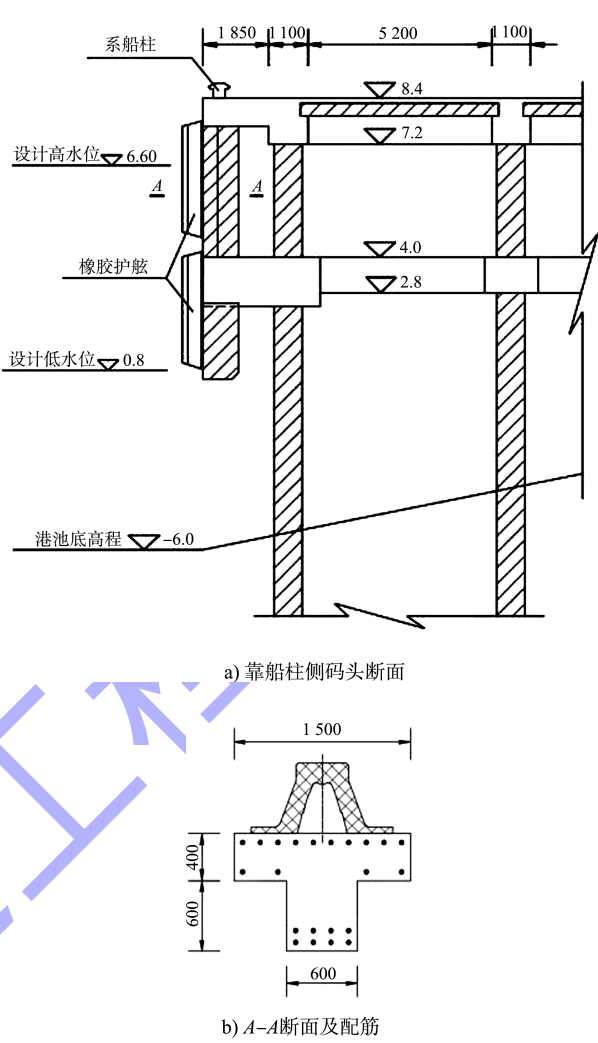


图 9 某多层桁架式码头靠船柱配筋 (高程: m; 尺寸: mm)

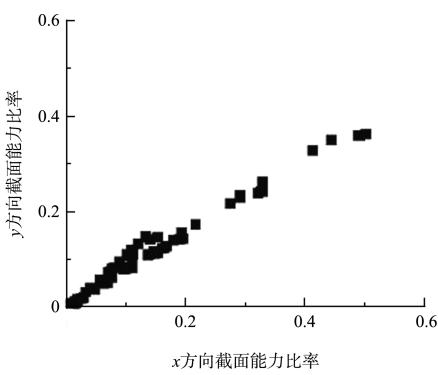


图 10 全节点内力配筋验算结果

6 结论

- 1) 本文编制程序可实现欧标任意形状钢筋混凝土断面正截面极限承载能力计算。
- 2) 本程序基于图形分解方法采用实时动态积分求解技术,具有计算效率和计算精度高的优点。